“大数の誤信” 問題に対するベイズの解

藤本 浩明*

論文要旨: 本稿は、Samuelson (1966) が同僚に申し出た ― 硬貨投げをして、条件がウラかオモテを言い当てると、彼が同僚に賭金の 2 倍を払戻す ― 賭けゲームの “大数の誤信 (A fallacy of large numbers)” を再考察する。ここで、誤信とは、そのゲームを 1 ショットではなく、100 回続けられれば、勝つと思う主観的確率 θ が増すとの同僚の返答が、参照点 (reference point) がない上に確率更新の術を持たない期待効用理論の観点からは、非合理となることを言う。そこで、本稿では、ベイズリスクの最小化の観点から、その返答を合理的に分析する。すなわち、ベルヌーイ (または二項) 分布を標本分布に、パラメータ θ と自然共役的なベータ分布を事前分布に選び、当該問題に対するベイズの解を考案する。

JEL CLASSIFICATION: C11, D81.
KEY WORDS: 大数の錯誤, 参照点, 期待効用, ベイズリスク, ベイズの解.

1 はじめに

本稿では、以下の問題を取り扱う。まず、Samuelson (1966, pp.153-4) は、コイン投げの臆病者の話を回想しながら、賭金のオッズが 2 : 1 のゲームを同僚に申し出た。すなわち、同僚はゲームの参加料 ϕ =\$100 を支払い、勝てば\$300 が払戻されるので、高いリターン率 $r = \frac{300-100}{100} = 2$ を得る。

> S. Ulam, a distinguished mathematician ⋯, once said: I define a coward as someone who will not bet when you offer him two-to-one odds and let him choose *his* side. ⋯

*福岡大学経済学部；メールアドレスは、fuji2@fukuoka-u.ac.jp。

> Recalling this conversation, a few years ago I offered some lunch colleagues to bet each \$200 to \$100 that the side of a coin *they* specified would not appear at the first toss.

次に、コイン投げの賭けゲームの申し出の回数をn回、賭け1回あたりに勝つと思う主観的確率をθとおくと、ある同僚の返答は意外なものであった：

> One distinguished scholar ··· gave the following answer: ≪ I won't bet because I would feel the \$100 loss more than the \$200 gain. But I'll take you on if you promise to let me make 100 such bets. ··· One toss is not enough to make it reasonably sure that the law of averages will turn out in my favor. But in a hundred tosses of a coin, the law of large numbers will make it a darn good bet. I am, so to speak, virtually sure to come out ahead in such a sequence, and that is why I accept the sequence while rejecting the single toss. ≫ ···

つまり、$n = 1$ショットゲームの場合は、勝てる確率θが負ける確率$1 - \theta$よりも小さく感じられて、$\theta < \frac{1}{2} < 1 - \theta$, where $\theta + 1 - \theta = 1$だから、事前にその同僚が$\theta_c = \frac{1}{3}$などと期待すれば、同僚は賭けを受けない；一方、大数(ここでは、$n = 100$)回ゲームの場合は、その確率θ_cは$\frac{1}{2}$へ収束して、$\theta_c \to \frac{1}{2}$ as $n \to 100$だろうから、1ショットゲームを大数の同僚n人にではなく、大数のn回ゲームをその同僚に申し出てくださいとお願いした。

> But ··· my colleague assures me that he wants to stand with Daniel Bernoulli, Bentham, Ramsey, v. Neumann, Marschak, and Savage on this basic issue ···. *Each outcome must have its utility reckoned at the appropriate probability; and when this is done it will be found ···*
>
> *Theorem.* If at each outcome or wealth level within a range, the expected utility of a certain investment or bet is worse than abstention, then no sequence of such independent ventures (that leaves one within the specified range of income) can have a favorable expected utility.
>
> Thus, if you would always refuse to take favorable odds on a single toss, you must rationally refuse to participate in any (finite) sequence of such tosses.

しかし···Samuelson (1966, pp.155-6)は、効用の計算に適切な確率θは、事前も事後も$\theta_s = \frac{1}{2}$だろうから、期待効用理論では、1ショットゲームをしない人は、大数のn回ゲームを受入れはしないので、上述した同僚の返答は、非合理的な"大数の誤信 (A fallacy of large numbers)"と結論づける。

したがって、彼の結論から、本稿の目的を2点に絞る：ひとつは、1ショットゲームと大数の n 回ゲームとでは、結果の標本分布ばかりでなく、ひとりひとりの勝つと思う確率 θ の確率分布は異なるので、主観的な確率の更新をどうするのかということであり[▷1]；もうひとつは、その確率更新にも耐え得る長期と短期の合理性の基準をどうするのかということである[▷2]。

そこで、本稿では、1ショットと大数 n 回ゲームの結果の標本分布として、それぞれ、同じ主観的確率 θ の核を有する、ベルヌーイ分布と二項分布を考える。また、その確率 θ の核と「相性のよいお相手 (ハーバード学派) (松原, 2010, p.68)」として、自然共役的なベータ分布を事前分布に選び、ベイズリスクの最小化の観点から、事後分布を導出する。なお、劉, *et al.* (2011, p.95) に依る合理性の基準は、基準化された資産という参照点 (reference point) を持つが、最適化を必要としないし、長期と短期とで異なることもない。

本稿の進捗は以下のとおり：次節で、期待効用理論の濫觴とされる1738年のベルヌーイの論文は、「実は ⋯、効用に関するものでもなかった。⋯ リスクのある企ては、結果の幾何平均で評価すべき (パウンドストーン, 2010, p.236)」などの文献のサーベイを行う；第3節では、リスクのある賭けゲームのオッズ2：1またはリターン率 $r = 2$ とトレードオフ関係にある射幸心 θ の条件に言及した上で、ベイズの解を求める；第4節は、結論を述べる。

2　文献のサーベイ

さて、Bernoulli (1954) に端を発するとされる期待効用理論は、フォンノイマンとモルゲンシュテルンによって公理化されただけの単一理論ではない。それは今や、広田, *et al.* (2002, p.30) が指摘するように、サベッジの主観的期待効用理論など改訂版が多く存在する、複数の理論群と言える。

▷1 “The more difficult job of revising the model remains undone (Lopes, 1981, p.384 r).”

▷2 “This move toward multiple criteria will entail the abandonment of maximization (or, equally, minimization) as keystone to rationality, as Samuelson puts it ⋯. Thus the conception of rationality will come to rest more squarely on essentially subjective judgments about how diverse — and sometimes competing — criteria combine or trade off with one another (Lopes, 1981, p.385 l).”

ところが、それらの理論群の公理を侵犯する事例は、フォンノイマンとモルゲンシュテルン当人の例（推移律の選好逆転）に限らず、アレの逆説（確実性効果）、エルスバーグの壷（曖昧性効果）、プロスペクト理論（フレーミング効果）など枚挙に暇がない (広田, *et al.*, 2002, p.29, pp.38-49)。

侵犯の原因を２つ挙げよう：ひとつは、例えば、上記の壷は超幾何分布に従うなど、標本分布や確率 θ の密度関数がほとんど明示されないことである。よって、確率 θ の演繹的計算と統計量の帰納的推定 $\hat{\theta}$ との話が混在することも少なくない。本稿の当該コイン投げのベルヌーイ試行 $\boldsymbol{X}_i$ で標本サイズが n の場合は、最尤推定量は $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ だが、同様に確からしい仮定下では常に $\theta = \frac{1}{2}$ である▷3; もうひとつは、参照点 (reference point) の有無である。例えば、幾何平均 G_m の最大化問題を解くケリーの基準 (Kelly, 1956, p.919) および利得か損失いずれかのフレームからの選択問題を考えるプロスペクト理論 (Kahneman, *et al.*, 1979, p.274) には参照点があるが▷4、期待効用理論は、それらに対応する点を持たない：なぜならば、効用は、通常、単調増加の凹関数 (限界効用逓減の法則) として定義されるからである。

期待効用理論は、さらなる窮地に陥る。なぜならば、拠所であった Bernoulli (1954, pp.31-3) のラテン語「論文は、実はサンクトペテルブルグの賭けに関するものでも、効用に関するものでもなかった。いずれも余談 (パウンドストーン, 2010, p.236)」な上に▷5、擁護派 Samuelson (1979, p.305) は「幾何平均に反対で凝り固まるようになった (パウンドストーン, 2010, pp.282-3)」が、結局、「リスクのある企ては、結果の幾何平均で評価すべき (パウンドストーン, 2010, p.236)」ことだったからである。脚注 ▷5 のように、効用 u

---

▷3 Samuelson (1966) は暗黙裡に、同様に確からしい $\theta_s = \frac{1}{2}$ を長期的にも短期的にも仮定していることがわかる。また、彼の同僚の長期的な大数 ($n = 100$) 時での確率を反映しそうな最尤推定量 $\hat{\theta}$ の導出に関しては、本稿の脚注 ▷10 第２段落のなお書き以下を参照されたし。あとは、短期的な事前確率 $\theta_c = \frac{1}{3}$ との整合性を図ればよい。なお、大数の法則とスターリングの公式から、その推定量 $\hat{\theta}$ は、正規分布で近似可能なことが知られている。

▷4 プロスペクト理論の諸問題（参照点移動等）は、(竹下, 2009, pp.139-42) を参照のこと。

▷5 サンクトペテルブルグの賭けでのコイン投げの結果 $\mathcal{H}$ は、Samuelson (1977, p.36 r) の予想と異なり、幾何分布に従う。ウラが出る主観的確率を θ とおくと、利得 $\boldsymbol{R} = 2^{\mathcal{H}-1}$ の数学的期待値 $E_x(\boldsymbol{R}) = \frac{1-\theta}{1-2\theta}$、幾何平均 $G_m(\boldsymbol{R}) = (2^0)^{1-\theta}\,(2^1)^{\theta(1-\theta)}\,(2^2)^{\theta^2(1-\theta)}\,(2^3)^{\theta^3(1-\theta)}\cdots = 2^{0\theta^0(1-\theta)+1\theta^1(1-\theta)+2\theta^2(1-\theta)+3\theta^3(1-\theta)+\cdots} = 2^{\theta/(1-\theta)}$、期待効用 $E_x(\ln \boldsymbol{R}) = \ln G_m(\boldsymbol{R}) = \frac{\theta}{1-\theta}\ln 2$ なので、$E_x(\boldsymbol{R}) > G_m(\boldsymbol{R}) > E_x(\ln \boldsymbol{R})$ を得る。なお、$\ln 2$ は一定で、凸の $2^{\mathcal{H}-1}$ をテーラー展開しても、凹にはならない。詳細は、劉, *et al.* (2011, pp.93-5) を参照のこと。

の増分 du が利得 r に反比例し、その増分 dr に比例する (Bernoulli, 1954, pp.27-8) はずの自然対数型の効用関数 $\ln u$ の凹性 (酒井, 2010, p.66) は、変数 r に全く影響を与えず、定数 $\ln 2$ として現れるだけである。換言すると、対数型の効用関数は、例えば、その脚注 ▷5 の利得 $\boldsymbol{R}$ の期待効用 $E_x(\ln \boldsymbol{R}) = \ln G_m(\boldsymbol{R})$ のように、幾何平均 G_m の冪乗の乗算を加算で計算しやすくするという、数学上の利便性のためにだけ存在している。よって、ベルヌーイの規範の拠所は、数学的期待値 $E_x(\boldsymbol{R})$ > 幾何平均 $G_m(\boldsymbol{R})$ > 調和平均 $H_m(\boldsymbol{R})$ など▷6、参照点を必要としない統計量の大小関係の比較に過ぎない。

しかしながら、この対数の利便性によって、期待効用は、幾何平均 G_m の最大化問題として蘇る。それを示すために、冒頭で述べたコイン投げの賭ゲーム (Samuelson, 1966, pp.153-4) と同様の問題に関する最適な参加料を考えよう。まず、参加料を ϕ、リターン率を r とおく。例えば、100 円の参加料で、払戻し額が 500 円のときは、$r = \frac{500-100}{100} = 4$ などと、賭親：子のオッズは、r：1 である。次に、参加者の初期資産を w_0 とおき、θ の確率で $r\phi$ を勝ちとるか、$1-\theta$ の確率で ϕ を失うものと仮定する。ここで、θ は、参加者が勝つと思う主観的確率 $\mathrm{P_r}$ であり、i 回目のコイン投げ $\boldsymbol{X}_i$ でウラの出る確率 θ である：$\mathrm{P_r}(\boldsymbol{X}_i) = \theta$。すると、基準化された資産 $\frac{\boldsymbol{W}}{w_0}$ の幾何平均 G_m が最大となるような参加料 ϕ^* は、対数の利便性 (2.2) 式から、

$$\underset{\phi}{\text{Maximize}}\ G_m\left(\frac{\boldsymbol{W}}{w_0}\right) = \left(\frac{w_0+r\phi}{w_0}\right)^{\theta}\left(\frac{w_0-\phi}{w_0}\right)^{(1-\theta)}; \tag{2.1}$$

$$\underset{\phi}{\text{Maximize}}\ E_x\left(\ln \frac{\boldsymbol{W}}{w_0}\right) = \ln G_m\left(\frac{\boldsymbol{W}}{w_0}\right) \tag{2.2}$$

$$= \theta \ln \frac{w_0+r\phi}{w_0} + (1-\theta)\ln \frac{w_0-\phi}{w_0} \tag{2.3}$$

なので、必要条件として、$\frac{dG_m}{d\phi} = 0$; または、$\frac{dE_x(\ln(\boldsymbol{W}/w_0))}{d\phi} = 0$ を解けば▷7、

$$\phi^* \equiv \frac{(1+r)\theta-1}{r}w_0 \begin{cases} > 0 & \text{if } \frac{1}{1+r} < \theta \le 1; \\ = 0 & \text{if } 0 \le \theta \le \frac{1}{1+r} \end{cases} \tag{2.4}$$

▷6 ここで、調和平均を引合いに出したのは、それが期待効用に等しいという意味ではない：$H_m(\boldsymbol{R}) \neq E_x(\ln \boldsymbol{R})$; 同様に確からしい仮定下では、発散する数学的期待値 $E_x(\boldsymbol{R})$ 以外ならば、幾何平均 $G_m(\boldsymbol{R})$ の必然性はなく、別の小さな平均 $H_m(\boldsymbol{R})$ でも良いという意味である。

▷7 十分条件は、常に満たされている：$\frac{d^2G_m}{d\phi^2} < 0$; または、$\frac{d^2E_x(\ln(\boldsymbol{W}/w_0))}{d\phi^2} < 0$。

となり、係数 $\frac{(1+r)\theta-1}{r}$ がケリーの公式 (Kelly formula) である。

そして、$\theta \gtreqless \frac{1}{1+r}$ が射幸心条件 (劉, *et al.*, 2011, p.95) である[▷8]。つまり、勝てると思う確率 θ が $0 < \theta \leq \frac{1}{1+r}$ の範囲にある人は、賭親：子のオッズが r：1 で、子に有利な賭けごと ($r > 1$) にさえも参加しない。そこで、前節において、Samuelson (1966, pp.153-4) が申し出たコイン投げの賭ゲームで、同僚の確率を $\theta_c = \frac{1}{3}$ とおいたことを思い出そう。そのリターン率 $r = 2$ から、射幸心条件は $\theta_c \leq \frac{1}{r+1} = \frac{1}{3}$ なので、その θ_c が ($\theta_{cc} = \frac{1}{2}$ などの) より大きな値に更新されないうちは、同僚は申し出を受けない。このように、勝つ確率を $\theta_c = \frac{1}{3}$ と感じる人は、射幸心がさらに煽られなければ、すなわち、より高いリターン率 $r = 4 > 2$ のような条件 $\theta_c > \frac{1}{r+1} = \frac{1}{5}$ でなければ、自分の資産 w_0 の $\frac{(1+r)\theta_c-1}{r} = \frac{(1+4)/3-1}{4} = \frac{1}{6}$ を最適な参加料 ϕ^* として支払うことはない。しかし、勝てる確率 θ が同様に確からしいと思えば、$\theta_{cc} = \frac{1}{2} > \frac{1}{r+1} = \frac{1}{3}$ なので、1 ショットゲームでもサミュエルソンの申し出に乗り、$\frac{(1+r)\theta_{cc}-1}{r}w_0 = \frac{(1+2)/2-1}{2}w_0 = \frac{w_0}{4}$ までも支払うことになる。

3　モデル

3.1　射幸心条件 $\theta \gtreqless \frac{1}{1+r}$ について：–

前節では、基準化された資産 $\frac{W}{w_0}$ の幾何平均 G_m が最大となるような賭ゲームの参加料 ϕ^* を計算した。そこでは、射幸心条件 $\theta > \frac{1}{1+r}$ を満たせば、資産 w_0 の $100\frac{(1+r)\theta-1}{r}\%$ を支出することが最適解であった。しかし、サンクトペテルブルグの賭けゲーム (Bernoulli, 1954, pp.31-3) と異なり、勝ち馬投票券 (1 枚 100 円)、ジャンボ宝くじ (1 枚 300 円)、本稿でのサミュエルソンの賭ゲーム (1 回 100 ドル) など、最低の参加料 ϕ が固定金額で提示されており、わざわざ最適な参加料 ϕ^* を計算する必要がない場合も多い。

[▷8] 射幸心条件 $\theta \gtreqless \frac{1}{1+r}$、とくに θ の主観的な感じ方によって、人はあるとき賭けをしたり、しなかったりするものと思われる。なお、サンクトペテルブルグの賭けでは、リターン率 r が無限大なので、勝つと思う確率 θ_σ がかなり小さくても、ゼロでない限り、$\theta_\sigma > \frac{1}{1+r} \to 0$ as $r \to \infty$ を満たすので、最適参加料 ϕ_σ^* は、$\phi_\sigma^* = \frac{(1+r)\theta_\sigma-1}{r}w_0 \to \theta_\sigma w_0$ as $r \to \infty$ に収束する：$\phi_\sigma^* = \theta_\sigma w_0$。よって、最適な参加料として、自分の資産 w_0 の $100\theta_\sigma\%$ を払い続ける。

そこでまず、固定された参加料を ϕ_c とおくが、それは、最低参加料 ϕ_1 を c 枚購入するように、$\phi_c = c\phi_1$ と置換しても差し支えない。つぎに、本件サミュエルソンの賭ゲームには該当しないこともあって、厳密な場合分けによる分析は、今後の研究に譲ることにして、平均リターン率を r、賭親：子のオッズを $r:1$ とおく。例えば、100 円の参加料で、アタリの金額が 900 円と 500 円のときは、$r = \frac{(900+500)/2-100}{100} = 6$ となる。そして、参加者の初期資産を w_0 とおき、θ の確率で $r\phi_c$ を勝ちとるか、$1-\theta$ の確率で ϕ_c を失うものと仮定すると、次の補題を得る。

補題 1.（射幸心条件） 参加料 ϕ_c を支払って、賭ゲームに参加する者は、勝つと平均的に思う主観的確率 θ が、基準化された資産 1 + 平均リターン率 r の逆数よりも大きい場合に限る：$\frac{1}{1+r} < \theta \leq 1$；しかし、$0 \leq \theta \leq \frac{1}{1+r}$ の場合には、参加しない。

■ **証明**. つまり、オッズが $r:1$ の二者択一的な賭ゲームでは、勝つと思う

$$\text{主観的確率}\ \theta\ \text{が、}\theta \begin{cases} > \frac{1}{1+r} & \text{のとき、参加料}\phi_c\text{を支払う；} \\ \leq \frac{1}{1+r} & \text{ならば、参加料}\phi_c\text{を支払わない。} \end{cases} \tag{3.1}$$

なぜならば、参加者は、基準化された資産 1 を参照点に、数学的期待値

$$E_x\left(\frac{\boldsymbol{W}}{w_0}\right) = \theta\,\frac{w_0 + r\phi_c}{w_0} + (1-\theta)\,\frac{w_0 - \phi_c}{w_0} > \frac{w_0}{w_0} = 1 \tag{3.2}$$

を少なくとも計算するからである。(3.2) 式の展開式より、$\{\theta(r+1)-1\}\phi_c > 0$ のように因数分解されて、参加料 $\phi_c > 0$ から、(3.1) 式の上段を得る。下段は、(3.2) 式の不等号の向きを反対にして解けばよい：$E_x(\frac{\boldsymbol{W}}{w_0}) \leq 1$。 **(証了)**□

興味深いことには、最適参加料 ϕ^* を計算する必要がないにも関わらず、(2.4) 式で考察したように、この補題 1 でも、射幸心条件 $\theta \gtrless \frac{1}{1+r}$ は全く同じものとなる：すなわち、確率 θ が $0 < \theta \leq \frac{1}{1+r}$ の範囲にある人は、賭親：子のオッズが $r:1$ で、子に有利な賭けごと $(r > 1)$ にさえも参加しないし、一度に c 枚分購入して、参加料 $\phi_c = c\phi_1$ を支払うことはないと言える。

念を押すと、この射幸心条件の範囲内 $(0 < \theta \leq \frac{1}{1+r})$ では、1 ショットゲームをしない人が大数の $n = c$ 回ゲームを受入れはしないこと (Samuelson, 1966, pp.155-6) を意味しているのではない。そこでは、勝つか負けるかの二者択一的な 1 ショットゲームに、大数 $n = c$ 回分の参加料 ϕ_c を支払わないことを意味している。

3.2 事前のベータ分布について：–

脚注 ▷3 で言及したこと、すなわち、Samuelson (1966, pp.155-6) の理論には、確率 θ が同様に確からしいという仮定が潜在することを思い出そう。その仮定の推定時にも当てはまることだが、本稿補題 1 の射幸心条件 $\theta \gtreqless \frac{1}{1+r}$ によって、二者択一的な賭ゲームに $n(\geq 1)$ 回参加するにせよしないにせよ、勝つと思う主観的確率 θ を推定する際に、例えば、これも脚注 ▷3 で言及した最尤推定量 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ の場合にも、θ は未知だけど一定という仮定が隠れている[▷9]。しかし、その推定量 $\hat{\theta}$ は、サイズ n が小さいときには一定値に収束しないばかりでなく、事前に標本データがない場合 $(n = 0)$ や初回 $(n = 1)$ の場合にも、サミュエルソンの仮定 $(\theta_s = \frac{1}{2} \neq \hat{\theta})$ または同僚の初期状態 $(\theta_c = \frac{1}{3} \neq \hat{\theta})$ を表現することは不可能である。

そこで、本稿の事前分布として、θ を実現値とするベータ分布 $\boldsymbol{Q}$ を考える。その密度関数 π は、

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} & \text{if } 0 \leq \theta \leq 1; \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{3.3}$$

である。ここで、α, β は超パラメータ、$\Gamma(\alpha) \equiv \int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ 等は変数 α のガンマ関数である。

そのベータ分布 $\boldsymbol{Q}$ の数学的期待値 E_x は、$E_x(\boldsymbol{Q}) \equiv \int_0^\infty \theta\pi(\theta)d\theta$ と定義されるから、事前に標本データがない場合 $(n = 0)$、その賭けゲームに勝てると思う主観的確率 θ_0 は、

▷9 "We have previously looked upon θ as being some constant, although an unknown constant. Let us now introduce a random variable Θ that has a distribution $\cdots$; and, just as we look upon x as a possible value of the random variable $\boldsymbol{X}$, we now look upon θ as a possible value of the random variable Θ (Hogg, *et al.*, 1995, p.364)."

$$\theta_0 = \int_0^1 \theta \tfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} d\theta = \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \tag{3.4}$$

となる。よって、サミュエルソンの仮定 ($\theta_s = \frac{1}{2}$) および同僚の事前確率 ($\theta_c = \frac{1}{3}$) は、それぞれ、$\alpha = \beta = 1$ および $\alpha = 1, \beta = 2$ などで表現できる。

3.3 2点 (ベルヌーイ) 分布について：－

それでは、勝つか負けるかの二者択一的な賭ゲームにおける、第 i 回目のコイン投げの試行を確率変数 $\boldsymbol{X}_i$ とする標本分布を考えよう。標本データとして、ウラならば成功で、$\boldsymbol{X}_i(\text{success}) = 1$；一方、オモテは失敗で、$\boldsymbol{X}_i(\text{failure}) = 0$ を割り当てる。すると、その実現値を x_i、ウラの出る確率を θ とおくと、$\boldsymbol{X}_i$ はベルヌーイ分布に従い、その確率関数 $f_i(x_i)$ は、

$$f_i(x_i) = \begin{cases} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} & \text{if } x_i = 0,\ 1; \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{3.5}$$

となり、$\sum_{x_i=0}^{1} f_i(x_i) = 1 - \theta + \theta = 1$ を満たす。これは、積率母関数 $M_1(t)$ を計算すると、$M_1(t) \equiv E_x(e^{tX_i}) = \sum_{x_i=0}^{1} e^{tx_i} f_i(x_i) = 1 - \theta + \theta e^t$ を得るので、$M_1(0) = 1$ からも確認できる[▹10]。

3.4 二項分布について：－

それぞれ、0(負け：オモテ) か 1(勝ち：ウラ) の値を実現値 x_i にとる、上記コイン投げの賭ゲームを n 回試行すれば、実現値を $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ とする確率変数 $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ の起こりうる場合の数は、全てがオモテから全て

▹10 Hogg, *et al.* (1995, p.209) より、各確率変数 $\boldsymbol{X}_i$ の和の確率変数 $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ の積率母関数 $M_n(t) \equiv E_x(e^{tY}) = \Pi_{i=1}^{n} M_1(t)$ は、$M_n(t) = (1-\theta+\theta e^t)^n$ と計算できる。

なお、変数 $\boldsymbol{Y}$ の実現値を $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$、尤度関数を $L(\theta)$ とおくと、$L(\theta) = \Pi_{i=1}^{n} f_i(x_i) = f_1(x_1)\ f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) = \theta^y(1-\theta)^{n-y}$ だから、(2.2) 式のように対数の利便性を考えて、必要条件 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0$ を解けば、十分条件 $\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d\theta^2} < 0$ は常に満たされるので、最尤推定量 $\hat{\theta} = y/n = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ を入手できる。

がウラまで、すなわち、標本データ $y=0,1,\cdots,n$ の全 n 回のうち、確率 θ のウラが y 回、確率 $1-\theta$ のオモテが $n-y$ 回の組み合わせ $\frac{n!}{y!(n-y)!}$ を係数として考えればよい。すると、その確率関数 $g(y)$ は、

$$g(y)=\begin{cases}\frac{n!}{y!(n-y)!}\theta^{y}(1-\theta)^{n-y} & \text{if } y=0,1,2,\cdots,n;\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases} \tag{3.6}$$

のように表現できるので、二項定理 $(\beta+\alpha)^n=\sum_{y=0}^{n}\frac{n!}{y!(n-y)!}\alpha^y\beta^{n-y}$ より、$\sum_{y=0}^{n}g(y)=\sum_{y=0}^{n}\frac{n!}{y!(n-y)!}\theta^y(1-\theta)^{n-y}=(1-\theta+\theta)^n=1$ だから、確率変数 $\boldsymbol{Y}$ は二項分布に従う[▷11]。

3.5　事後のベータ分布について：―

すると、(3.6) 式とイェジ・ネイマンの因数定理 (Hogg, *et al.*, 1995, p.318) より、核 κ_1 が n 個の独立した (3.5) 式からの標本 x_i の密度 f_i の積と比例 ($\propto$) して、$\kappa_1(y|\theta)\propto f_1f_2\cdots f_n$ となるので、確率変数 $\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ は、θ の十分統計量 $\boldsymbol{S}$ $(=\boldsymbol{Y})$ である。そこで、連続型変数のベイズの定理：

$$\pi(\theta|\textstyle\sum_{i=1}^{n}x_i)\equiv\frac{\pi(\theta)\kappa_1}{\int_0^1\pi(\theta)\kappa_1 d\theta}=\frac{\pi(\theta)g(s|\theta)}{\int_0^1\pi(\theta)g(s|\theta)d\theta}\equiv\pi(\theta|s);\ 0\le\theta\le 1 \tag{3.7}$$

より、(3.3) 式の事後分布 $\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{S}$ の確率密度関数 $\pi(\theta|s)$ は、積 $\pi(\theta)\kappa_1(s|\theta)$ と比例するために：$\pi(\theta|s)\propto\pi(\theta)\kappa_1(s|\theta)\propto\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\,\theta^s(1-\theta)^{n-s}$；

$$\pi(\theta|s)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+n-s)}\theta^{\alpha+s-1}(1-\theta)^{\beta+n-s-1} & \text{if } 0\le\theta\le 1;\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases} \tag{3.8}$$

を得る。

3.6　ベイズの解について：―

あとは、この (3.8) 式を用いて、ベイズリスク：損失関数 $\mathcal{L}=(\theta-\delta)^2$ の期待値；$E_x(\mathcal{L}(\boldsymbol{Q})|\boldsymbol{S}=s)$ を最小にする解 δ^*、ベイズの解 "*Bayes' solution* (Hogg, *et al.*, 1995, pp.367-8)" を計算すればよいので、次の補題を得る。

▷11 なお、その積率母関数は、当然ながら、脚注▷10 第 1 段落で求めた $M_n(t)$ と等しい：$M_n(t)\equiv E_x(e^{tY})=\sum_{y=0}^{n}e^{ty}g(y)=\sum_{y=0}^{n}\frac{n!}{y!(n-y)!}(e^t\theta)^y(1-\theta)^{n-y}=(1-\theta+\theta e^t)^n$。

補題 2.（ベイズの解） 補題 1 において、二者択一の賭ゲームに参加する者がベイズリスクを最小にする場合、勝てると思う主観的確率 θ の最適解 δ^* は、事後のベータ分布の平均 $\mu_s \equiv E_x(\boldsymbol{Q}|s)$ そのものであるが、事前ベータ分布の平均 θ_0 と最尤推定量 $\hat{\theta}$ との凸結合で表現できる。

■ **証明**. ベイズリスク $B_r \equiv E_x(\mathcal{L}(\boldsymbol{Q})|\boldsymbol{S}=s) = \int_0^1 (\theta-\delta)^2 \pi(\theta|s)d\theta$ を (3.8) 式から定義して、必要条件 $\frac{dB_r}{d\delta} = -2\int_0^1 (\theta-\delta)\pi(\theta|s)d\theta = 0$ を解けば、十分条件 $\frac{d^2B_r}{d\delta^2} = 2 > 0$ は常に満たされるので、最適なベイズの解 δ^* は、事後のベータ分布の平均、すなわち、(3.9) 式の数学的期待値 $E_x(\boldsymbol{Q}|s)$ となる：

$$\delta^* = \int_0^1 \theta\pi(\theta|s)d\theta / \int_0^1 \pi(\theta|s)d\theta = E_x(\boldsymbol{Q}|s)/1 = E_x(\boldsymbol{Q}|s) \equiv \mu_s \quad (3.9)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+n-s)} \frac{\Gamma(\alpha+s+1)\Gamma(\beta+n-s)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \frac{\alpha+s}{\alpha+\beta+n}$$

$$= \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{n}{\alpha+\beta+n}\frac{s}{n} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n}\theta_0 + \frac{n}{\alpha+\beta+n}\hat{\theta}. \quad (3.10)$$

以上から、(3.4) 式の事前ベータ分布の平均 $\theta_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ と脚注 ▷10 第 2 段落で求めた最尤推定量 $\hat{\theta} = \frac{s}{n}$ との凸結合であることもわかる。　**(証了)**□

結局、勝つと思う主観的確率 θ の十分統計量 $\boldsymbol{S}$ が所与の $(\boldsymbol{S} = s = \sum_{i=1}^n x_i)$ の場合：つまり、n 回のベルヌーイ試行のうち、s 回ウラが出て勝ったという標本データを得る場合、(3.9) 式のベイズの解 δ^* は、ベータ分布 $\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{S}$ の最小分散 $V(\boldsymbol{Q}|s) \equiv E_x((\boldsymbol{Q}-\mu_s)^2|s) = \int_0^1 (\theta-\delta^*)^2\pi(\theta|s)d\theta$ をもたらす。

その上、標本サイズ n が大数になればなるほど、凸結合の各ウエイトは、それぞれ、$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+n} \to 0$ as $n \to \infty$, $\frac{n}{\alpha+\beta+n} \to 1$ as $n \to \infty$ に収束することが (3.10) 式から判明するので、最適な意思決定のベイズの解 δ^* は、その事前確率の値 $\theta_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ を最尤推定値 $\hat{\theta} = \frac{s}{n}$ へと更新可能となる。

よって、第 $N(= n-1 \geq 0)$ 回めも、(3.1) 式の条件を利用可能なように、

$$\text{解 } \delta^*_{N+1} \equiv \frac{\alpha+s}{\alpha+\beta+N} \begin{cases} > \frac{1}{1+r} & \text{のとき、参加料}\phi_c\text{を支払う；} \\ \leq \frac{1}{1+r} & \text{ならば、参加料}\phi_c\text{を支払わない。} \end{cases} \quad (3.11)$$

などと書き換えることができるので、以下の命題を得る。

命題 1.（ベイズ流の射幸心条件） 参加料 ϕ_c を支払って、第 $N+1$ 回目の二者択一的な賭ゲームに参加予定の者が、ベイズリスクを最小化することによって、勝つと思う主観的確率 θ の最適な意思決定 δ^*_{N+1} を図るならば、参加は、基準化資産 $1+$ リターン率 r の逆数よりも大きい場合に限る：$\frac{1}{1+r} < \delta^*_{N+1} \equiv \frac{\alpha+s}{\alpha+\beta+N} \leq 1$；一方、$0 \leq \delta^*_{N+1} \leq \frac{1}{1+r}$ の場合には、参加しようとはしない。

■ **証明**. 補題 1 ならびに補題 2 より、明らかである。 **(証了)**□

命題 1 は、$N+1$ のいかなる $N(\geq 0)$ に対して、短期と長期の意思決定の整合性を図ることが可能である。そのため、冒頭の定理 “*Theorem* (Samuelson, 1966, p.156)” と異なり、彼の同僚の選択は合理的なものとなる▷12：つまり、リターン率 $r=2$ の 1 ショットゲームでは、サイズ N やウラの回数 s はゼロに過ぎない $(N=s=0)$ ので、ベイズの解による最適な意思決定 δ^*_1 は、$\delta^*_1 = \frac{\alpha+0}{\alpha+\beta+0} = \theta_0 \leq \frac{1}{1+2}$ を満たすため、例えば、$\alpha=1, \beta=2$ でもよく；大数の場合、ここでは、$N+1=100$ だから、$N=99$ の場合、その 99 回のベルヌーイ試行のうち、過半数のウラの回数 $s=50$ 回 (同様に確からしい仮定を裏付けるような回数) は必要なく、その回数 s が、大数の法則から、$s \geq 34$ 回以上は出るだろうから、勝てそうと思えば、ベイズの解 δ^*_{100} は、賭けに参加すべきことを同僚に教える▷13：$\delta^*_{100} = \frac{1+34}{1+2+99} > \frac{34}{102} = \frac{1}{3}$。

4 おわりに

本稿は、硬貨投げをして、その条件がオモテかウラかを言い当てれば、サミュエルソンが同僚に賭金 $\phi_c = 100$ ドルのリターン率 $r=2$ の 300 ドルを

▷12 整合性については、脚注 ▷3 の議論を、合理性については、焦点や力点が違うが、脚注 ▷2 ならびに “I hope Samuelson’s colleague would join me in defending his choice (Lopes, 1996, p.184)” などの議論を参照されたし。

▷13 無論、同僚が負ける可能性も大：“When you lose — and you sure can lose — with N large, you can lose real big (Samuelson, 1979, p.305)” だが、賭親：子のオッズが 2：1 で、子に有利な賭けごとなので、賭親のサミュエルソンが大敗する可能性の方がさらに大である。

払い戻す賭けゲームを取扱い、サミュエルソンが“大数の誤信 (A fallacy of large numbers)”と名付けた問題の解決を図った。

ここで、誤信とは、サミュエルソンの同僚の返答のことである：それは、サミュエルソンが、その賭けゲームを1ショットだけでなく、100回行うことを同僚に申し出てくれれば、同僚が勝てると思う主観的確率 θ が増加すると答えたことを指す；しかし、サミュエルソンは、参照点 (reference point) がない上に、確率更新の術を持たない期待効用理論の観点から言えば、その返答は非合理なので、誤信であると結論付けた。

そこで本稿では、基準化された資産 $\frac{W}{w_0}$ を参照点として、ベイズリスクの最小化の観点から、同僚の確率 θ の更新を伴う合理的な返答を考案した。つまり、第 i 回目の二者択一的なベルヌーイ試行 $\boldsymbol{X}_i$ の和として、十分統計量の二項分布 $\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ を標本分布に、また、確率 θ と自然共役的なベータ分布 $\boldsymbol{Q}$ を事前分布に選ぶことによって、第 $N+1$ 回目の賭けゲームに対する合理的なベイズの解 $\delta^*_{N+1}\equiv\frac{\alpha+s}{\alpha+\beta+N}$ を事後分布 $\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{S}$ から導出した。

果たして、補題1, 2から命題1を得た。すなわち、参加料 ϕ_c を支払って、その賭ゲームの第 $N+1$ 回目に応じる者の射幸心条件は、基準化資産 $1+$リターン率 r の逆数よりも大きい場合に限る：$\delta^*_{N+1}=\frac{\alpha+s}{\alpha+\beta+N}>\frac{1}{1+r}$；しかしながら、$0\leq\delta^*_{N+1}\leq\frac{1}{1+r}$ の場合には、参加しようとはしない。例えば、$N=s=0, \alpha=1, \beta=r=2$ ならば、$\delta^*_1\leq\frac{1}{3}$ なので、同僚は1ショットゲームの賭けはしないけれども；大数の場合、ここでは、$N+1=100$ だから、$N=99$ の場合、その99回のベルヌーイ試行のうち、過半数のウラの回数 $s=50$ 回 (同様に確からしい仮定を裏付けるような回数) は必要なく、その回数 s が、大数の法則から、$s\geq 34$ 回以上は出そうと思い、射幸心条件が $\delta^*_{100}>\frac{1}{3}$ を満たすならば、サミュエルソンの同僚は、賭けに乗る。

参考文献

Bernoulli, D. 1954; 1738 originally. “Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk,” *Econometrica*, 22: 23-36.

広田, S., 増田, S., 坂上, T., 編著. 2002. 『心理学が描くリスクの世界：行動的意思決定入門』, 慶應義塾大学出版会, 25-96.

Hogg, R. V., Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, 5th ed., Prentice-Hall, New Jersey, 307-94.

Kahneman, D., Tversky, A. 1979. "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, 47: 263-91.

Kelly, Jr. J. L. 1956. "A New Interpretation of Information Rate," *Bell System Technical Journal*, 35: 917-26.

Lopes, L. L. 1981. "Notes, Comments, and New Findings: Decision Making in the Short Run," *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 7: 377-85.

———. 1996. "When Time Is of the Essence: Averaging, Aspiration, and the Short Run," *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 65: 179-89.

劉, W., 奈良, Y., 藤本, H. 2011. 「サンクトペテルブルグの賭けゲームとベイズの解」, 社会・経済システム学会第 30 回大会発表論文抄録集, 93-6.

松原, N. 2010. 『よくわかる最新ベイズ統計の基本と仕組み』, 秀和システム, 66-9, 87.

パウンドストーン, W. ; 松浦, S. 訳. 2010. 『天才数学者はこう賭ける：誰も語らなかった株とギャンブルの話』, 青土社： 148-61; 226-96.

酒井, Y. 2010. 『リスクの経済思想』, ミネルヴァ書房： 57-85.

Samuelson, P. A. 1966; 1963 originally. "Risk and Uncertainty: A Fallacy of Large Numbers," in *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, The MIT Press, Cambridge, 1: 153-8.

———. 1977. "St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described," *Journal of Economic Literature*, 15: 24-55.

———. 1979. "Why We Should Not Make Mean Log of Wealth Big Though Years to Act Are Long," *Journal of Banking and Finance*, 3: 305-7.

竹村, T. 2009. 『行動意思決定論：経済行動の心理学』, 日本評論社, 25-96.