逐次手番をもつ n 人囚人のジレンマにおける協力の実現に対する情報構造の有効性

西　原　　　宏*

論文要旨：n 人囚人のジレンマにおける同時手番の仮定を崩し，逐次的な行動選択の間にプレイヤーは他者の選択結果について情報を得られるとする．特に非協力行動の選択が互いに観察可能である状況に注目し，協力の実現可能性について検討する．分析の結果，全員または一部のプレイヤーによる協力が実現するナッシュ均衡の存在が示される．さらに協力の実現に対する情報構造の有効性を検討し，対称性の条件のもとでは非協力が観察可能な情報構造は，あらゆる情報構造の中で協力の実現に対して最も有効性が高いことを明らかにする．

1　序

人々が私的利益を追求することにより社会的に好ましくない結果が生じる状況を社会的ジレンマという．その例は，環境汚染，環境破壊，資源の濫費，交通問題，フリーライダー問題などの社会問題に数多く見られる．

社会的ジレンマの生起のメカニズムは，通常，n 人囚人のジレンマという標準形ゲームによって説明される．このゲームでは，各プレイヤーは協力と非協力の選択肢をもつが，利得構造の性質から非協力が支配戦略となるために人々

*福岡大学経済学部

は非協力を採ってしまうと説明される.（Schelling (1978)，Dawes（1980)）

Nishihara（1997）は，この説明において n 人囚人のジレンマの同時手番であることが重要な働きをしていることを指摘し，人々が行動の選択の際に自分の前に行われた非協力行動の有無が分かる場合について分析した．そして，利得関数が一定の条件を満たすならば全員または一部のプレイヤーが協力を行うナッシュ均衡が存在することを示した．この結果は，非協力の観察可能性が社会的ジレンマの回避に重要な役割を果たすことを示している．

非協力がその行為自体，あるいはその痕跡を見ることによって観察可能な場合，各プレイヤーは選択の時点において非協力の有無だけでなく，非協力の採られた回数も観察可能である．また，n 人囚人のジレンマの利得構造は，各プレイヤーの非協力の選択が外部効果をもつ状況を表しており，各プレイヤーは利得の値から何人が非協力を採ったかを知ることができる．Nishihara（1997）の考察した非協力の有無が分かる情報構造は，このような非協力の観察や利得から得られる情報と首尾一貫していない．本論文では，各プレイヤーが非協力の採られた回数が分かる場合について協力の実現可能性を検討する．

社会的ジレンマの解消の糸口を求めて，n 人囚人のジレンマに何らかの要素を追加して協力の実現可能性を検討する研究が多くの研究者によって行われている．そのような要素で代表的なものは，ゲームの繰り返しであるが（Friedman 1971, Fudenberga and Maskin 1986，Axelrod 1987，Neyman 1999），それ以外にも交渉プロセス（Kakai 1981），監視と処罰のしくみ（Okada 1993），限定合理性（Radner 1986）などがある．本論文は，ワンショットのプレイの間にプレイヤーが獲得し得る情報を追加的要素とするものとしてこの系統の研究に位置付けることができる．

分析の結果，非協力の採られた回数が分かる情報構造のもとでは，全員または一部のプレイヤーの協力が実現するナッシュ均衡，プレイヤー全員が非協力を採るナッシュ均衡が存在することが示される．さらに，一般的な情報構造について協力の実現に対する有効性を定義し，情報構造の有効性を比較検討する．プレイヤーの匿名性と公平性を意味する対称性の制約のもとで，非協力の採られた回数が分かる情報構造は最も有効性の高い情報構造であることが明らかにされる．

次節ではモデルを定式化する．第 3 節では戦略と均衡を定義する．第 4 節は均衡分析にあてられる．第 5 節で情報構造の有効性を検討する．最終の第 6 節を結句とする．

2　モデル

次のように定義される標準形ゲーム $< N, \{C, D\}, \{f_i\}_{i \in N} >$ を **n 人囚人のジレンマ**と呼ぶ．$N = \{1, 2, ..., n\}$（$n \geq 2$）はプレイヤーの集合，C（協力）と D（非協力）は各プレイヤーの選択できる行動，$f_i : \{C, D\} \times \{0, 1, ..., n-1\} \to \mathbf{R}$ はプレイヤー i の利得関数である．$f_i(a, k)$ の値は，プレイヤー i が行動 $a \in \{C, D\}$ を採り，彼以外のプレイヤーの中で k 人が C を採るときの彼のフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の値を表す．f_i について次の 3 つの仮定を置く:

（A.1）すべての k について $f_i(C, k) < f_i(D, k)$,

（A.2）$f_i(C, n-1) > f_i(D, 0)$,

（A.3）$f_i(C, k)$ と $f_i(D, k)$ は，k についての厳密な増加関数.

ここで，（A.1）は，他のプレイヤーがどのような選択を行っているとしても，C を採るよりも D を採ることでより高い利得が得られることを意味する．（A.2）は，全員が D を採る状況よりも全員が C を採る状況の方がより望ましいことを意味する．(A.3）は，C と D のどちらの行動を採ったときでも，他のプレイヤーの中で C をとる者が多いほど利得は高くなることを意味する．

（A.1）により，どのプレイヤーにとっても D が支配戦略である．しかし，（A.2）より，どのプレイヤーにとっても，全員が C を採る状況の方が全員が D を採る状況よりも望ましい．こうして，人々が利己的な行動を採ることにより社会にとって好ましくない状態が生じる「社会的ジレンマ」の状況が，このゲームによって表されると考えられている．

社会的ジレンマの原因を利得構造に求める説明は，一見説得力がある．しかし，この説明の背後には，人々が同時手番によって選択を行うという仮定があることに注意すべきである．現実のゲーム的状況では文字通りの意味での同時手番はありえないので，この仮定は，人々が行動を決める際，他者の行動決定を知ることができないという情報構造の仮定と考えられる．したがって，人々が他者の行動を観察できる状況ではこの仮定が成り立たず，非協力が必ずしも支配戦略とはならず，社会的ジレンマは回避される可能性がある．行動の選択が観察可能な状況としては，次のようなものが考えられる．

事例１（家畜の放牧）：放牧地が家畜の過放牧によって砂漠化する事態がモンゴルやアフリカにおいて多く見られる．過放牧は，様々な形態で生じるが，特に，ヤギの頭数が過剰となるために生じる過放牧がある．ヤギは，牛と違い

草を根元まで食べる習性があり，それが草地の再生能力を奪ってしまう[1]．これが，砂漠化の原因となる．一方，ヤギは牛に比べて価格が安いので，住民はヤギを放牧する動機をもつ．牛やヤギは，３月から５月が出産シーズンであり，子どもの家畜を購入する時期は，この時期に限られる．そこで，この時期に各自が行動を決定するゲーム的状況として捉えることができる.「仔牛を放牧する」を協力,「仔ヤギを放牧する」を非協力とする．これらの行動は，一旦選択してしまえば，変更できない．各農家が家畜を購入する時点は，それぞれの家の他の財の必要性などによって決まる．例えば，穀物などが必要になったときに市場に行き，必要な商品とともに家畜を購入する．もともとの状況では，放牧されている家畜は牛がほとんどで，ヤギの頭数はあまり多くないとしよう．その場合，買い替えによって仔牛を購入した場合は，牧草地で生まれた仔牛と区別がつかず目立たない．しかし，仔ヤギを購入した場合は，それは目立つ行為となる．こうして非協力が他者によって観察される．

事例２（薪炭材の採集）：村人が森を薪炭材の採集地として生活している状況を考える．薪炭材としては，落ちている枝を採集することになっており，木を切り倒すことは禁止されている.「落ちている枝を集める」を協力,「木を切り倒す」を非協力とする．村人が薪炭材の採集を行う時点は，各家の薪の在庫によって決まる．そのため，各家がどのような順番で採集に出かけるかは誰にも分からない．枝を集めるにしろ，木を切り倒すにしろ必要量を確保してしまえば，行動は確定する．誰かが落ちている枝を採集したか否かは他者には分からないが，誰かが木を伐り倒せば，それは周りの者の知るところとなる．

[1] 佐藤 (1985)p139, 吉川・山中・大手 (2004)p150

本論文では，このような状況における人々の合理的な行動を分析し，協力の可能性について考察する．

利得関数 $\{f_i\}_{i\in N}$ が与えられたとき，次の（i）から（iv）の構造をもつ展開形ゲームを**情報構造をもつジレンマゲーム**と呼び $\Gamma(\mathscr{P})$ で表す．

（i）最初のノードは「自然」の手番で，$1, 2, ..., n$ の順列の全体から等確率で 1 つが選び出される．順列の全体を Π で表す．Π の要素を一般に π で表し**順序**と呼ぶ．順序 π が与えられたとき，$\pi(i)$ によってプレイヤー i の順番を表す[2]．

（ii）プレイヤーは,「自然」の選んだ順序に従って手番を持ち，C または D を選択する．

（iii）プレイヤーは，情報分割 $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_n\}$ を持つ．

（iv） すべてのプレイヤーが C または D の選択を行った後，各プレイヤー i は，自分の選択 a と他のプレイヤー中で C を採った人数 k によって，利得 $f_i(a, k)$ を獲得する．

このゲームは以下のように解釈される.「自然」による順序の決定は，人々の行動の選択の順序がアトランダムに決まることを表す．各プレイヤーの情報分割は，ゲームの進行における情報構造を表す．一般的には情報の伝達に不確実性が伴う場合も考えられるが，ここではそのようなものは排除している．全てのプレイヤーが選択を行った後，各プレイヤーは，自分および他者の選択の結果として n 人囚人のジレンマの利得を獲得する．

本論文では，特に情報分割として，$\mathscr{Q} = \{\mathscr{Q}_1, ..., \mathscr{Q}_n\}$ に注目する．ただし，

---

[2]例えば，$\pi = (2, n, ..., 3)$ のとき，$\pi(2) = 1$，$\pi(n) = 2$，$\pi(3) = n$ である．

Q_i^k はプレイヤー i の手番の前に k 人のプレイヤーが D を採るときに到達するプレイヤー i の意思決定ノードの集合であり，$\mathscr{Q}_i = \left\{Q_i^0, ..., Q_i^{n-1}\right\}$ と定義する．$\mathscr{Q}$ を**非協力が観察可能な情報分割**と呼ぶ．この情報分割は，事例 1 や事例 2 の状況を表わす．

別の情報構造としては，$\mathscr{R} = \{\mathscr{R}_1, ..., \mathscr{R}_n\}$ がある．ここで，$\mathscr{R}_i = \left\{R_i^0, R_i^1\right\}$ で，R_i^0 はプレイヤー i の手番の前に D を採ったプレイヤーが 1 人もいないときに到達するプレイヤー i の意思決定ノードの集合であり，R_i^1 はそれ以外の意思決定ノードの集合である．$\mathscr{R}$ を**非協力の有無が観察される情報分割**と呼ぶ．この情報分割は，Nishihara（1997，1999）で分析された．

3　戦略と均衡概念

情報構造 $\mathscr{P}$ が与えられたときに $\Gamma(\mathscr{P})$ を分析するために，基本的な概念と記号を以下のように定義する．

$\Gamma(\mathscr{P})$ において，$s_i : \mathscr{P}_i \to \{C, D\}$ を**プレイヤー i の戦略**と呼ぶ．特に，$\mathscr{P} = \mathscr{Q}$ のときは，プレイヤー i の**戦略**を $K \subseteq \{0, 1, ..., n-1\}$ をパラメータとして s_i^K で表わし，$k \in K$ のとき $s_i^K(Q_i^k) = C$，$k \notin K$ のとき $s_i^K(Q_i^k) = D$ と定義する．また，$\mathscr{P} = \mathscr{R}$ のときは，プレイヤー i の戦略を ab（$a, b \in \{C, D\}$）で表す．ここで，a は R_i^0 で採る行動，b は R_i^1 で採る行動を表す．

$S_i(\mathscr{P})$ で，プレイヤー i の**戦略の集合**を表す. プレイヤー 1 から n の戦略を並べたものを**戦略プロファイル**と呼ぶ．$S(\mathscr{P}) = \prod_{i \in N} S_i(\mathscr{P})$ は，戦略プロファイルの集合である．本論文では，基本的にナッシュ均衡については純粋戦略均衡のみを考える．これは後に見るように，純粋戦略の範囲で多くの均衡が

存在するからである．

戦略プロファイル $s \in S(\mathscr{P})$ が与えられたとき，順序 π の後に s によって選ばれる行動の列を π **における** s **のプレイ**と呼ぶ．各順序における s のプレイをすべての順序について記述したものを s **のプレイ**と呼ぶ．順序 π における s のプレイの中で C をとる人数を $n(\pi, s, \mathscr{P})$ で表す．$(1/n!)\sum_{\pi\in\Pi} n(\pi, s, \mathscr{P})$ を $\mathscr{P}$ **のもとで** s **によって達成される期待協力者数**と呼び $E(s, \mathscr{P})$ で表す．

戦略プロファイル s におけるプレイヤー i の期待利得を $u_i(s)$ によって表す．戦略プロファイル s が，すべての $i \in N$ と $s'_i \in S_i$ について $u_i(s) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ を満たすとき，s は**ナッシュ均衡**であると定義する．ただし， s_{-i} は s に含まれる戦略の中で，プレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略の組を表し，(s'_i, s_{-i}) は s'_i と s_{-i} の組み合わせからなる戦略プロファイルを表す．$\mathscr{P}$ におけるナッシュ均衡の集合を $NE(\mathscr{P})$ で表わす．$max_{s\in NE(\mathscr{P})}E(s, \mathscr{P})$ を $\mathscr{P}$ **で実現できる期待協力者数**と定義し $E(\mathscr{P})$ で表す．

4　均衡分析

この節では，非協力が観察可能な情報構造における均衡分析を行う．まず，プレイヤー全員による協力に関して次の定理が成り立つ．

定理 4.1. $\Gamma(\mathscr{Q})$ において $s^{\{0\}} = (s_1^{\{0\}}, ..., s_n^{\{0\}})$ は，次の条件が成り立つときナッシュ均衡である．

条件 $(c1)$：すべてのプレイヤー i について

$$f_i(C, n-1) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i(D, k).$$

証明． 戦略プロファイル $s^{\{0\}}$ のプレイでは，すべてのプレイヤーが C を採る．もしあるプレイヤー i がこのプレイから外れて異なる選択をしようとするならば，情報集合 Q_i^0 で D を採らなければならない．$s^{\{0\}}$ の定義より，これはプレイヤー i より後に手番をもつプレイヤーの D の選択を引き起こす．条件 $(c1)$ の不等式の右辺は，そのときのプレイヤー i の期待利得を表している．なぜなら, $\Gamma(\mathscr{Q})$ の「自然」の手番の定義から，プレイヤー i より後に手番をもつプレイヤーの数は 0 人から $n-1$ 人までの人数が $1/n$ の等確率であり得るからである．よって, 条件 $(c1)$ が成り立つとき，$s^{\{0\}}$ はナッシュ均衡となる．■

$s^{\{0\}}$ がナッシュ均衡となり全員の協力が実現される理由は，繰り返しゲームにおけるトリガー戦略による協力の実現に類似している．$\Gamma(\mathscr{Q})$ において誰かが $s^{\{0\}}$ から逸脱して D を採ると，それは自分より後の手番のプレイヤーによって観察され，彼らの D の選択を引き起こす．その場合の期待利得が十分に低ければ，誰も自分から D を採らない．こうして，$s^{\{0\}}$ は全員での協力が実現するナッシュ均衡となる．これが 1 回のゲームのプレイの中で起こることがこのゲームの特徴である．

定理 4.2. $k \leq n-2$ のとき, $\Gamma(\mathscr{Q})$ において戦略プロファイル $s^{\{k\}} = (s_1^{\{k\}}, ..., s_n^{\{k\}})$ は，次の条件が成り立つときナッシュ均衡であり，その均衡では k 人が D を採るので，$n-k$ 人のプレイヤーによる協力が実現する．

条件 $(ck1)$：全てのプレイヤー $i \in N$ について

$$f_i(C, n-k-1) \geq \frac{1}{n-k} \sum_{l=0}^{n-k-1} f_i(D, l).$$

証明． この戦略プロファイルでは，手番の順序に関わらず，最初の k 人が D を採り，その後の $n-k$ 人が C を採る．したがって $n-k$ 人のプレイヤーによ

る協力が実現する．この戦略プロファイルにおいては，プレイヤー i が $s_i^{\{k\}}$ 以外の選択を行っても利得が増大しないことを示そう．$s_i^{\{k\}}$ において彼は，情報集合 Q_i^j（$0 \leq j \leq k-1$）で D を採る．これらの情報集合の 1 つ Q_i^j で彼が C を採るとする．その場合も彼の後のプレイヤーは，D を採ったプレイヤーが k 人になるまで D を採り，その後は全てのプレイヤーが C を採る．この結果，Q_i^j に到達する手番の順序において，彼の利得は $f_i(C, n-k-2)$ となる．彼が，Q_i^j で D を採るとき，彼の利得は $f_i(D, n-k-1)$ であるから，この変更は利得の減少をもたらす．これは，すべての Q_i^j（$0 \leq j \leq k-1$）で成り立つ．戦略 $s_i^{\{k\}}$ を用いるとき，彼は情報集合 Q_i^j（$j \geq k+1$）で D を採る．この情報集合には彼以外のプレイヤーが $s_{-i}^{\{k\}}$ を採っているとき到達しない．よって，彼が選択を C に変更しても利得は変わらない．最後に，プレイヤー i が Q_i^k で戦略 $s_i^{\{k\}}$ の指定する C ではなく D を採るとする．このとき，彼の後に手番を持つプレイヤーはすべて D を採る．彼の前に手番をもつプレイヤーによって採られた C の数は，0 から $n-k-1$ までがどれも等確率であり得る．よって，Q_i^k で彼が D を採るときの期待利得は，上の不等式の右辺で表される．彼が Q_i^k で C を採るときの利得は，左辺で表されるから，上の不等式が成り立つならば，彼は Q_i^k で D を採ることによって利得を増大させることはできない．以上により $s^{\{k\}}$ はナッシュ均衡である．■

この定理で示されているのは，先着順に一定の数（$n-k$ 人）だけ非協力の選択が許される均衡である．ある一定のレベルまでは非協力の選択が許容されるが，それ以上になることは皆が差し控えるという状況である．条件 $k \leq n-2$ は，協力を採るプレイヤーは最低 2 人必要であることを意味する．協力を採る

プレイヤーが 1 人の場合は，そのプレイヤーの選択によって C を採るか否かの選択を変える他者がいないため，ナッシュ均衡にならない．$k=0$ の場合には，この定理は定理 4.1 と一致することに注意せよ．この定理は上の定理の拡張になっている．

上の 2 種類の均衡は，全てのプレイヤーが同じ戦略を用いる対称な均衡だった．次の定理は非対称な均衡の存在を示している．

定理 4.3. $k \leq n-2$ とする．$\Gamma(\mathscr{Q})$ において，k 人が s_i^{ϕ} を採り残りの $n-k$ 人が $s_i^{\{0,1,\dots,k\}}$ を採る戦略プロファイル $\hat{s}^k$ は，次の条件が成り立つときナッシュ均衡である．

条件 $(ck2)$：$s_i^{\{0,1,\dots,k\}}$ を採るプレイヤー i について

$$f_i(C, n-k-1) \geq \sum_{l=0}^{n-k-1} p(k,l) f_i(D, n-k-l-1),$$

ただし，

$$p(k,l) = \frac{1}{n!}(n-l-1)!(k+1)\binom{n-k-1}{l} l!$$

と定義する．この均衡のプレイでは，s_i^{ϕ} を採るプレイヤーが D を採り，残りのプレイヤーが C を採る．

証明． $\hat{s}^k$ において s_i^{ϕ} を採るプレイヤーの集合を N_1，$s_i^{\{0,1,\dots,k\}}$ を採るプレイヤーの集合を N_2 とする．まず，この $\hat{s}^k$ において到達し得る情報集合において各プレイヤーの最適な選択を調べる．N_1 に含まれるプレイヤー i の情報集合で到達し得るものは $Q_i^0, \dots, Q_i^{k-1}$ である．これらの情報集合でプレイヤー i が C，D のいずれを採っても，彼の後のプレイヤーは，N_1 に含まれるプレイヤーであれば D を採り，N_2 に含まれるプレイヤーであれば C を採る．よっ

て，プレイヤー i の選択は，彼以降の手番のプレイヤーの行動に影響を与えない．したがって，(A.1) により D がプレイヤー i の最適な選択となる．

一方，N_2 に含まれるプレイヤー j の到達し得る情報集合は，Q_j^0,…，Q_j^k である．これらの情報集合でプレイヤー j が C を採るとき，彼以降の手番のプレイヤーは N_1 に含まれるプレイヤーであれば D を採り，N_2 に含まれるプレイヤーであれば C を採る．下で示すように，これらの情報集合でプレイヤー j が D を採るとき，条件付期待利得はどの情報集合においても等しい．したがって，情報集合 $Q_j^0,\ldots$，Q_j^k においてプレイヤー j が D を採るときの期待利得は，彼が戦略 s_j^{ϕ} を採るときの期待利得である．この期待利得を求めよう．任意の順序 π を考える．π において $N_1 \cup \{j\}$ の中で最後の手番のプレイヤーを $\hat{j}$ とする．プレイヤー $\hat{j}$ は，手番において D を採り，そのときこのパスの上で D を採った人数が $k+1$ 人となる．したがって，プレイヤー $\hat{j}$ の後に手番を持つ N_2 に含まれるプレイヤーは，全員 D を採る．その人数を l 人とする．こうして，π におけるプレイヤー j の利得は $f_j(D, n-k-l-1)$ となる．このような手番の順序の数は，$(n-l-1)!(k+1)\binom{n-k-1}{l}l!$ である．なぜなら，$N_1 \cup \{j\}$ の中で最後の手番のプレイヤーより前のプレイヤーの並び方の数が $(n-l-1)!$ あり，$N_1 \cup \{j\}$ の中の最後の手番のプレイヤーになり得るプレイヤーの数が $k+1$ 人あり，最後の l 人のプレイヤーの取り方の総数が $\binom{n-k-1}{l}$ で，この l 人のプレイヤーの並べ方の総数が $l!$ だからである．したがって，プレイヤー j が s_j^{ϕ} を採るとき，彼の期待利得は，

$$\sum_{l=0}^{n-k-1} p(k,l) f_j(D, n-k-l-1)$$

となる．よって，条件 $(ck2)$ の不等式が N_2 に属する全てのプレイヤーについ

て成り立つとき，$\hat{s}^k$ はナッシュ均衡である．

最後に，$Q_j^0, \ldots, Q_j^k$ のどの情報集合においても，プレイヤー j が D を採るときの条件付き期待利得は等しいことを示す．まず，Q_j^0 について考える．$\hat{s}^k$ においてこの情報集合の中に到達するノードをもつ手番の順序の集合を Π_j^0 とする．$\pi^0 \in \Pi_j^0$ とする．プレイヤー j が Q_j^0 で D を採ると，N_1 のプレイヤーの中で π^0 における最後の手番のプレイヤー j_0 が D を採るとき，採られた D の合計が $k+1$ となる．すると，プレイヤー j_0 より後に手番を持つ N_2 に含まれるプレイヤーの人数を $m(\pi^0)$ 人とすると，これらのプレイヤーは D を採るので，このパスにおいて C を採るプレイヤーの数は，$n-k-m(\pi^0)-1$ 人となる．よって，π^0 におけるプレイヤー j の利得は，$f_j(D, n-k-m(\pi^0)-1)$ である．したがって，プレイヤー j が Q_j^0 で D を採るとき，この情報集合における彼の条件付き期待利得は，

$$e_0 \equiv \frac{1}{|\Pi_0|} \sum_{\pi^0 \in \Pi_0} f_j(D, n-k-m(\pi^0)-1)$$

で表せる．次に，Q_j^1 について考える．$\hat{s}^k$ においてこの情報集合の中に到達するノードをもつ順序の集合を Π_j^1 とする．$\pi^1 \in \Pi_j^1$ とする．この順序には，プレイヤー j より前に N_1 に含まれるプレイヤーが 1 人いなくてはならない．いま，プレイヤー j が Q_j^1 で D を採ると，π^1 において N_1 に含まれるプレイヤーの中で最後の手番をもつプレイヤー j_1 が D を採ったとき，採られた D の合計が $k+1$ となる． プレイヤー j_1 より後の手番のプレイヤーで N_2 に含まれるプレイヤーの人数を $m(\pi^1)$ 人とすると，これらのプレイヤーは D を採るので，このパスにおいて C を採るプレイヤーの数は，$n-k-m(\pi^1)-1$ 人となる．よって，プレイヤー j の利得は $f_j(D, n-k-m(\pi^1)-1)$ である．したがって，

プレイヤー j が Q_j^1 で D を採るとき，この情報集合における彼の期待利得は，

$$e_1 \equiv \frac{1}{|\Pi_1|} \sum_{\pi^1 \in \Pi_1} f_j(D, n-k-m(\pi^1)-1)$$

で表せる．ここで，任意の $\pi^1 \in \Pi_j^1$ において，N_1 の中で最初に手番を持つプレイヤーとプレイヤー j を入れ替えてできる順序 $\pi^{1'}$ は，Π_j^0 に含まれ,$m(\pi^1) = m(\pi^{1'})$ を満たすことに注意せよ．また，逆に，任意の $\pi^0 \in \Pi_j^0$ において，N_1 の中で最初に手番を持つプレイヤーとプレイヤー j を入れ替えてできる順序 $\pi^{0'}$ は，Π_j^1 に含まれ，$m(\pi^0) = m(\pi^{0'})$ を満たす．こうして Π_j^0 と Π_j^1 の間に 1 対 1 対応が存在するので，$e_0 = e_1$ が成り立つ．同様の論法によって，情報集合 Q_j^0,…，Q_j^k のどれにおいてもプレイヤー j が D を採るときの条件付き期待利得は等しい．これによって証明が完結する．■

この均衡は，特定の k 人の非協力が許容され，残りのプレイヤーの間で協力が実現する均衡である．非協力が観察可能な情報構造は匿名性が成り立つ状況であるので，観察された非協力がここで非協力が許容されているプレイヤーであるか否かは，他のプレイヤーには分からないことに注意すべきである．そのような状況でも，人数を手がかりにして，一部のプレイヤーの非協力は許容され，それ以外のプレイヤーの協力が求められる均衡が存在することをこの定理は示している．$k = 0$ の場合には $p(k, l) = 1/n$ となり，この定理も定理 4.1 に一致する．

5　協力の実現に関する情報構造の有効性

Nishihara(1997) では，$\Gamma(\mathscr{R})$ においてプレイヤー全員による協力が実現するナッシュ均衡が存在することを示し，それより弱い条件でプレイヤー全員の協力が実現するナッシュ均衡をもつ情報構造が存在しないことから，情報構造 $\mathscr{R}$ が全員による協力の実現に関して最も有効性の高い情報構造であることが示された．しかしながら，全員による協力が実現せず一部のプレイヤーによる協力が実現する場合については，詳しい分析が行われていない．この節では，上の $\Gamma(\mathscr{Q})$ の分析結果を用いてこの問題を再検討する．

上述の Nishihara(1997) の結果は，$E(\mathscr{P})=n$ となる利得関数の集合が $\mathscr{P}=\mathscr{R}$ のときに包含関係に関して最大となることである．n より小さい m について $E(\mathscr{P})=m$ となる利得関数の集合を考え，それが集合の包含関係に関して最大となる $\mathscr{P}$ を m **人の協力の実現に対して最も有効性の高い情報構造**と定義する．以下ではそれがどのような情報構造であるか検討する．

Nishihara(1997) によって導入された対称性の概念をここで用いる．これは，すべてのプレイヤーが本質的に同じ情報構造を持ち，本質的に同じ戦略を用いる状況を表すものである．特定のプレイヤーに偏ることなくプレイヤーに関して匿名性と公平性の成り立つ範囲で情報構造の有効性を評価するためにこの制約を置くことにする．

以下のように記号と定義を追加する．$\varphi : N \to N$ を**名前の付け替え**と呼び，Φ を名前の付け替えの集合とする．例えば，$n=3$ で，名前の付け替え $\varphi \in \Phi$ が，$(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)) = (3, 1, 2)$ であるとすると，この φ は，プレイヤー 1, 2, 3 を新たにプレイヤー 3, 1, 2 と呼び替える名前の付け替えである．$\varphi(\pi)$ は，

名前の付け替え $\varphi \in \Phi$ によって順序 π が新しい名前で表されたものである．

各 $i \in N$ についてプレイヤー i の意思決定ノードを (π, α) で表す．ここで，α は，ϕ または $(a_1, ..., a_m)$ （$m \leq n$，$a_k = C$ または D）で，(π, ϕ) は「自然」によって π が選ばれた直後のプレイヤー $\pi(1)$ の意思決定ノードを表し，(π, α) は $\pi \in \Pi$ のとき行動の列 α が採られたときに到達するプレイヤー $\pi(m+1)$ の意思決定ノードを表す.

全てのプレイヤーの意思決定ノードの集合を X で表わす．$\varphi \in \Phi$ が与えられたとき，$\psi^1_\varphi : X \to X$ を $x = (\pi, \alpha) \in X$ に $(\varphi(\pi), \alpha) \in X$ を対応させる写像であると定義する．ありうる情報分割の全体を $\mathscr{S}$ で表す．$\varphi \in \Phi$ が与えられたとき，$\psi^2_\varphi : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ を $\{\mathscr{P}_1, ..., \mathscr{P}_n\}$ に $\{\hat{\mathscr{P}}_{\varphi(1)}, ..., \hat{\mathscr{P}}_{\varphi(n)}\}$ を対応させる写像であると定義する．ただし，$\hat{\mathscr{P}}_{\varphi(i)} = \{\psi^1_\varphi(P^k_i) : P^k_i \in \mathscr{P}_i\}$ とする．

定義 5.1. 任意の $\varphi \in \Phi$ について

$$\mathscr{P} = \psi^2_\varphi(\mathscr{P}) \tag{1}$$

であるとき，情報構造 $\mathscr{P}$ は対称であるという.

この定義の意味は以下の通りである．プレイヤー i を固定し, $\varphi(i) = j$ とする．条件 (1) は，もしすべてのプレイヤーが φ によって名前を付け替えられるならば，$\mathscr{P}_i$ と $\mathscr{P}_j$ は意思決定ノードの分割の仕方が本質的に同じであることを言っている．$\mathscr{P}_i$ は，プレイヤー i が,「自然」や他のプレイヤーがどのような選択をしたかについて獲得できる情報を表す．よって, 条件 (1) が成り立つならば，プレイヤーのこの情報が「自然」や各プレイヤーの名前を付け替えた後のプレイヤー j の選択について獲得できる情報と等しいことになり，プレイヤー j がプレイヤー i と同じ視点を持つことを意味している．定義 5.1 は，こ

の同等性が，任意の名前の付け替えと任意のプレイヤーについて成り立っていることを述べている．つまり，すべてのプレイヤーが同等の視点を持つことを言っている

次に，戦略プロファイルの対称性を定義する．条件1において，任意の $P_i \in \mathscr{P}_i$ は，$P_i = \varphi(P_i')$ によって，$P_i' \in P_{\varphi(i)}$ に対応する．プレイヤー i とプレイヤー $\varphi(i)$ が，このようにして対応する2つの情報集合において同じ行動を選択するものであれば，彼らの行動様式が同等であると言っていいであろう．この考え方によって，次の定義を与える．

定義 5.2. 対称な情報分割 $\mathscr{P}$ の戦略プロファイル $s \in S(\mathscr{P})$ において，任意の $\varphi \in \Phi$，$i \in N$，$P_i \in \mathscr{P}$ について，$s_i(P_i) = s_{\varphi(i)}(\varphi(P_i))$ が成り立つとき，s は**対称**であるという．

命題 5.1. $\mathscr{Q}$ は，対称な情報分割であり，任意の K について，$s^K = (s_1^K, ..., s_n^K)$ は，対称な戦略プロファイルである．

証明． $\mathscr{Q}$ において，プレイヤー i の情報集合 Q_i^k について考える．これは，i の手番の前までにちょうど k 人が D を採ったときに到達する i のノードからなる．これは，プレイヤーの番号がどのようにつけられているかに依存しない．よって，任意の $\varphi \in \Phi$ について，$Q_i^k = \varphi(Q_i^k)$ が成り立つ．よって，任意の $\varphi \in \Phi$ について，$\mathscr{Q}_i = \varphi(\mathscr{Q}_i)$ が成り立つので，$\mathscr{Q}$ は対称な情報分割である．s^K の対称性は定義より明らか．■

戦略プロファイル s が対称でナッシュ均衡であるとき，s は**対称なナッシュ均衡**であるという．対称な戦略プロファイルについて，次の性質が成り立つ．

補題 5.1. （Nishihara 1997）対称な情報集合 $\mathscr{P}$ における戦略プロファイル s が対称なとき，任意の 2 つの順序 $\pi, \pi' \in \Pi$ における s のプレイ $a(s, \pi)$ と $a(s, \pi')$ は等しい．

対称な情報分割と戦略プロファイルのもとでは，全てのプレイヤーが同じように情報を獲得し，同じように行動する．そのため，手番の順序によって行動の列が異なることがなく，どの順序のプレイも同一となる．これが，上の補題 5.1 の成立する理由である．この補題を使って次の定理が成り立つ．

定理 5.1. 任意の m について，$\mathscr{Q}$ は m 人の協力の実現に対して最も有効性の高い情報構造である．

証明 . 前節の分析で，$\Gamma(\mathscr{Q})$ において，$s^{\{k\}}$ は，条件 $(ck1)$ が成り立つとき，ナッシュ均衡であることが示された．また，これらが対称な情報分割と戦略プロファイルであることを確認した．以下では，任意の対称な情報構造 $\mathscr{P}$ と対称な戦略プロファイル $s \in S(\mathscr{P})$ において，s がナッシュ均衡で，各順序における協力者数が m であれば，$k = n - m$ について $(ck1)$ が成り立つことを示す

補題 *5.1* より s において，各順序におけるプレイは同一となる．それを $(a_1, ..., a_n)$ で表す．いま協力者数が m であるから，$a_1, ..., a_n$ の中の m 個が C で，$n - m$ 個が D である．$a_t = C$ である添え字 t の集合を T で表わす．いま，s において，プレイヤー i が戦略 s_i の代わりにすべての情報集合で D をとる戦略を採るとする．このとき，彼は，s において彼が C を採っていた全ての順序において D を採る．よって，$\pi(i) \in T$ の順序 π において彼は選択を C から D に変更する． 1 つの $t \in T$ に対して $\pi(i) = t$ となる順序 π が $n - 1$ 個あることに注意せよ．これから，$\pi(i) \in T$ である順序は $(n-1)!m$ 個存在する．

$\pi(i)=t\in T$ なる順序において D に変更すると，彼は利得 $f_i(D,t-1+\gamma_i(s,\pi))$ を得る．ここで $\gamma_i(\pi,s)$ は，順序 π においてプレイヤー i が D をとり他のプレイヤー j（$j\neq i$）が s_j に従うときのプレイヤー i より後に C を採るプレイヤーの数を表す． よって，戦略の変更によってプレイヤー i が得る期待利得は，次の v となる．

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{(n-1)!m}\sum\nolimits_{\pi:\pi(i)\in T} f_i(D,\pi(i)-1+\gamma_i(\pi,s))\\
&\geq \frac{1}{(n-1)m!}\sum\nolimits_{\pi:\pi(i)\in T} f_i(D,\pi(i)-1)\\
&= \frac{1}{(n-1)!m}(n-1)!\sum\nolimits_{h=1}^{m} f_i(D,h-1)\\
&= \frac{1}{m}\sum\nolimits_{h=1}^{m} f_i(D,h-1)
\end{aligned}
$$

となる． s におけるプレイヤー i の利得は $f_i(C,m-1)$ である．s はナッシュ均衡だから，$f_i(C,m-1)\geq v$ が成り立たなくてはならない． $l=h-1$ と表わし，$m=n-k$ を代入すれば，条件 $(ck1)$ の不等式 $f_i(C,n-k-1)\geq 1/(n-k)\sum_{l=0}^{n-k-1} f_i(D,l)$ が得られる．■

この定理で注目すべき点は，対称的な情報分割に範囲を限定すれば，いかなる協力のレベルにおいても $\mathscr{Q}$ が常に最も有効性の高い情報構造であるということである．

定理 5.1 の成立する理由は，次のように直観的に理解することができる．補題 5.1 より，対称な情報分割と戦略プロファイルのもとでは，どの順序のプレイも同一となる．ここで一般に，特定の k 個の手番では D が採られて残りの $n-k$ 個の手番では C が採られるというプレイを考えよう．$\mathscr{Q}$ においては，各プレイヤーは自分の前に何人のプレイヤーが D を採った分かるので，プレイ

ヤー達は,「D を採るプレイヤーが k 人になるまでは D を採り，D を採るプレイヤーが k 人になったら C を採る．自分の前のプレイヤーがこのルールを破った場合は D をとる」という選択の仕方でこのようなプレイを実行することができる．このプレイにおいては，C を採るべきプレイヤー i が D を採ると，その後の手番のプレイヤーは全て D を採る．これは，D を採った後に起こりうる反応として最悪のものである．これが，$\mathscr{Q}$ が最も有効性の高い情報構造となることの直感的な理由である．

6　結句

本稿では，非協力が観察可能な情報構造 $\mathscr{Q}$ に注目し，$\Gamma(\mathscr{Q})$ のナッシュ均衡を分析し，さらにこれが対称性の制約の中で任意の人数の協力の実現に関して最も有効性の高い情報構造であることを示した．最も有効性の高い情報構造は，本来，協力の人数ごとに決まるものであるので，これは注目すべき結果であると言えよう．情報構造をもつジレンマゲームには様々な情報構造を考えることができるが，この結果は 1 つの理論的な参照点を提供している．

参考文献

Axelrod, R. (1987), *The Complexity of Cooperation*, Princeton University Press, Princeton.

Fudenberg, D. and E. Maskin(1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information," *Econometrica* Vol.54, pp.533-554.

Hardin, G. (1968), "The Tragedy of the Commons," *Science* Vol.162, pp.1243 -1248.

Kalai, E. (1981), "Preplay Negotiations and the Prisoner's Dilemma," *Mathematical Social Sciences* Vol.1, pp.375-379.

Neyman, A. (1999), "Cooperation in Repeated Games when the Number of Stages is not Commonly Known," *Econometrica* Vol.67, pp.45-64.

Nishihara, K. (1997), "A Resolution of N-person Prisoners' Dilemma," *Economic Theory* Vol.10, pp.531-540.

Nishihara, K. (1999), "Stability of the Cooperative Equilibrium in N-person Prisoners' Dilemma with Sequential Moves," *Economic Theory* Vol.13, pp.483-494.

Nishihara, K. (2010) "情報構造をもつ n 人囚人のジレンマにおける協力均衡の進化的安定性について," 福岡大学経済学論叢第 55 巻, pp.115-163.

Okada, A. (1993), "The Possibility of Cooperation in an n-person Prisoners' Dilemma with Institutional Arrangements," *Public Choice* Vol.77, pp. 629-656.

Schelling, T.C. (1978), *Micromotives and Macrobehavior*, Tront: W.W. Norton.

van Damme, E. (1991), *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, 2nd ed. Berlin, Springer-Verlag.

吉川賢，山中典和，大手信人（編著） (2004), 乾燥地の自然と緑化，共立出版.