比較静学、安定条件と不安定性に関する一試論

中　島　章　子*

第１節　比較静学

記号は通常通りで、Y は実質国民所得水準（実質国内所得水準と読み替えても構わない）、r は市場利子率、C は民間最終消費支出、I は投資（国内総固定資本形成に在庫の純増を加えたもの）、G は政府最終消費支出、EX は財およびサービスの輸出、IM は財およびサービスの輸入、S は貯蓄、T は税収、M は貨幣供給量、P は一般物価水準、L は貨幣供給量を表わしています。

財市場と貨幣市場の需給均衡式より、

$$\left\{\begin{array}{c} C+S+T=C+I+G+EX-IM \\ \dfrac{M}{P}=L(Y,r) \end{array}\right\}$$

上の式より C を除くと、

*福岡大学経済学部

（本稿の執筆には福岡大学経済学部の基礎演習・演習における議論が役立っています。特に、有川浩紀君、上薗拓也君の意見や質問が貢献しています。尚、原稿のパソコン入力には福岡大学経済学研究科の呉迪さんの協力を得ました。）

$$\begin{Bmatrix} S(Y)+T=I(r)+G+EX-IM(Y) \\ \dfrac{M}{P}=L(Y,r) \end{Bmatrix}$$

この二式を均衡点の近傍で全微分すると、

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial Y}dY+dT=\dfrac{\partial I}{\partial r}dr+dG+dEX-\dfrac{\partial IM}{\partial Y}dY \\ \dfrac{1}{P}dM-\dfrac{M}{P^2}dP=\dfrac{\partial L}{\partial Y}dY+\dfrac{\partial L}{\partial r}dr \end{Bmatrix}$$

整理して行列表記すると、

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial S}{\partial Y}-\dfrac{\partial IM}{\partial Y} & \dfrac{dI}{dr} \\ \dfrac{\partial L}{\partial Y} & \dfrac{\partial L}{\partial r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -dG-dEX+dT \\ \dfrac{1}{P}dM-\dfrac{M}{P^2}dP \end{pmatrix}$$

仮に単純化の為に $\dfrac{\partial IM}{\partial Y}=0$ 、更に輸出入がないと考えると、$dEX=0$ なので、

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial S}{\partial Y} & \dfrac{\partial I}{\partial r} \\ \dfrac{\partial L}{\partial Y} & \dfrac{\partial L}{\partial r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} dT-dG \\ \dfrac{1}{P}dM-\dfrac{M}{P^2}dP \end{pmatrix}$$

左辺の行列の行列式を Δ とおくと、

$\dfrac{\partial S}{\partial Y}>0, \dfrac{\partial L}{\partial r}<0, \dfrac{\partial I}{\partial r}<0, \dfrac{\partial L}{\partial Y}>0$ なので、

$$\Delta=-\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \mathrm{Y}}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial r}-\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Y}}>0$$

となります。

上の行列を dY、dr について解くと、

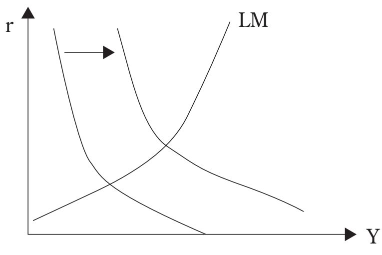
$$dY = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} dT - dG & \dfrac{\partial I}{\partial r} \\ \dfrac{1}{P}dM - \dfrac{M}{P^2}dP & \dfrac{\partial L}{\partial r} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left\{ \frac{\partial L}{\partial r}(dT - dG) - \frac{\partial I}{\partial r}\left(\frac{dM}{P} - \frac{M}{P^2}dP\right) \right\}$$

$$dr = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial S}{\partial Y} & dT - dG \\ \dfrac{\partial L}{\partial Y} & \dfrac{1}{P}dM - \dfrac{M}{P^2}dP \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left\{ -\frac{\partial S}{\partial Y}\left(\frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP\right) - \frac{\partial L}{\partial Y}(dT - dG) \right\}$$

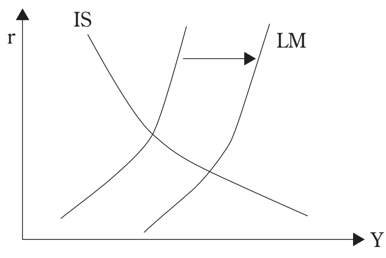
となります。これより、他の変数は変化しないと考えて、比較静学をすれば、

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial L}{\partial r}\right) > 0 \qquad \frac{dY}{dM} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial I}{\partial r}\right)\frac{1}{P} > 0$$
$$\frac{dr}{dG} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial L}{\partial Y}\right) > 0 \qquad \frac{dr}{dM} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{1}{P}\right) < 0$$

となります。これが比較静学です。



政府財政支出の増大は国民所得水準の増大、利子率の上昇をもたらす。（財政負担の増大は無視されている）



貨幣供給量の増大は国民所得水準の増大、利子率の下落をもたらす。（貨幣供給の増大に伴う、物価上昇は無視されている）

$$\Delta = -\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$$

$$-\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$$

$$-\frac{\frac{\partial S}{\partial Y}}{\frac{\partial I}{\partial r}} - \frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{\frac{\partial L}{\partial r}} > 0$$

マイナス記号をつけて、

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial Y}}{\frac{\partial I}{\partial r}} < -\frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{\frac{\partial L}{\partial r}} \qquad \therefore \text{IS の傾き} < \text{LM の傾き}$$

LM の傾きは右下がりなので、マイナスをつけた LM の傾きが IS の傾きよりも大きければ、安定します。安定している、と考えて比較静学の符号と値を決めています。

第 2 節　安定条件

財市場と貨幣市場で、総需要が総供給を上回れば、生産量と利子率が上昇する調整過程を考えます。

$$\frac{dY}{dt} = f(I + G - S - T) \qquad f' > 0 \qquad f(o) = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = g(L(Y, r) - \frac{M}{P}) \qquad g' > 0 \qquad g(o) = 0$$

これを 0 の近傍でテーラー展開し、一次近似をとります。

$$\frac{dY}{dt}=f(o)+f'\left\{\frac{\partial I}{\partial r}(r-r_0)-\frac{\partial S}{\partial Y}(Y-Y_0)\right\}$$
$$\frac{dr}{dt}=g(o)+g'\left\{\frac{\partial L}{\partial Y}(Y-Y_0)+\frac{\partial L}{\partial r}(r-r_0)\right\}$$
$$\begin{pmatrix} dY/dt \\ dr/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f'\frac{\partial S}{\partial Y}+f'\frac{\partial I}{\partial r} \\ g'\frac{\partial L}{\partial Y}+g'\frac{dL}{dr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y-Y_0 \\ r-r_0 \end{pmatrix}$$

この微分方程式の解は

$$\begin{aligned} Y(t)&=A_0e^{\lambda_1 t}+A_1e^{\lambda_2 t} \\ r(t)&=B_0e^{\lambda_1 t}+B_1e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$
という形になります。

λ_1、λ_2 は $|A-\lambda I|=0$ の特性方程式の解であり、この解が負の実部をもてば、$Y(t)$、$r(t)$ は収束します。特性方程式は以下の通りです。

$$\begin{vmatrix} -f'\frac{\partial S}{\partial Y}-\lambda & f'\frac{\partial I}{\partial r} \\ g'\frac{\partial L}{\partial Y} & g'\frac{\partial L}{dr}-\lambda \end{vmatrix}=0$$
$$\lambda^2-(-f'\frac{\partial S}{\partial Y}+g'\frac{\partial L}{\partial r})\lambda-f'g'(\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r}+\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y})=0$$

この二次方程式が負の実部をもつための必要十分条件は、解と係数の関係より、二次方程式の解は共役複素数なので、

二根の和は $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha<0$

二根の積は $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2>0$

でなければなりません。つまり、

$$(-f'\frac{\partial S}{\partial Y}+g'\frac{\partial L}{\partial r})<0$$
$$-f'g'(\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y}+\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r})>0$$
でなければなりません。

即ち、

$$-f'\frac{\partial S}{\partial Y}+g'\frac{\partial L}{\partial r}<0 \quad \text{—— ①}$$
$$\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y}+\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r}<0 \quad \text{—— ②}$$

でなければなりません。通常①は成立します。

②の符号条件は比較静学の $\Delta>0$ の条件に等しくなります。すなわち、均衡が安定的であると考えて、比較静学の符号を確定させています。

一般に２本の微分方程式の場合、安定条件は、２本の方程式を行列表示したものの、$\det A>0$　$trA<0$ となります。det は行列式を表します。tr はトレースを表わし、対角要素の和です。

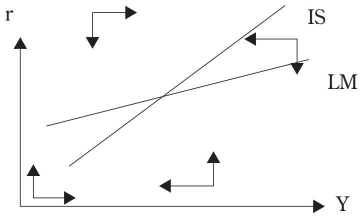
$X(t)=A_0e^{\lambda_1 t}+A_1e^{\lambda_2 t}$ が収束する為には、$A_0e^{\lambda_1 t}$ と $A_1e^{\lambda_2 t}$ がそれぞれ収束すれば充分です。$A_0e^{\lambda_1 t}=A_0e^{(\alpha+\beta i)t}$ が収束するには、$A_0e^{(\alpha+\beta i)t}=A_0e^{\alpha t}\cdot e^{\beta ti}$ なので、$\lim_{t\to\infty} A_0e^{\alpha t}$ が収束するためには $\alpha<0$ であれば充分です。

第３節　不安定性

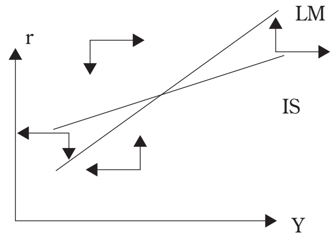
第１項　IS 曲線が右上がりの場合

では、IS 曲線が右上がりのときはどうでしょうか。国民所得水準が高いほど投資が増える場合は、すなわちストック調整原理が働いたり、加速度原理が働く場合は、IS 曲線は右上がりとなる可能性があります。このとき、位相図を描いてみると、IS の傾きが LM の傾きよりも大きいときが安定で

あることがわかります。また、LMの傾きがISよりも大きいときは不安定になります。



安定



安定と安定的な領域にわかれる。

上の安定条件の②で、

$$\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y}+\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r}<0$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r}<-\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y}$$

この両辺を、$\frac{\partial L}{\partial r}<0,\frac{\partial I}{\partial r}>0$ で割ります[1]。

$$\frac{\frac{\partial S}{\partial Y}}{\frac{\partial I}{\partial r}}>-\frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{\frac{\partial L}{\partial r}}$$

IS曲線が右上がりのときは、投資は利子に対して減少しているにも関わらず、所得が高くなると投資が増える効果の方が大きくなります。そのときは、第2象限の投資の計画表が通常の場合に対して逆であるように利子率の

[1] IS曲線が右上がりになるのは主にストック調整原理や加速度原理から、投資が所得の増加関数であることに由来します。しかし本稿は投資を利子率だけの関数としているので、この偏微係数となります。

増加関数に描かないと、右上がりのIS曲線は描けません。つまり、$\frac{\partial I}{\partial r}>0$ であるような第2象限の図を描きます。この場合、符号条件から、安定条件は、上の式となります。上の式から、IS曲線の傾きがマイナスをつけたLM曲線の傾きより大きいときが安定となります。

第2項　LM曲線が右下がりで調整は従来の場合

では、LM曲線もIS曲線も右下がりで、かつ調整は通常のIS LM曲線に向かう場合はどうでしょうか。

安定条件は、

$$\Delta = -\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$$

$$-\frac{\partial S}{\partial Y}\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial Y} > 0$$

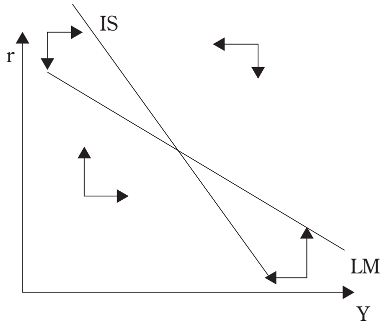
この両辺を、

$\frac{\partial L}{\partial r} < 0, \frac{\partial I}{\partial r} < 0$　でわります。

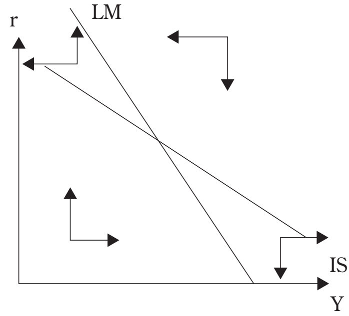
すると

$$-\frac{\frac{\partial S}{\partial Y}}{\frac{\partial I}{\partial r}} > \frac{\frac{\partial L}{\partial Y}}{\frac{\partial L}{\partial r}}$$　です。

負をつけたISの傾きがLMの傾きより大となります。実際に位相図を描くと、ISの傾きがLMの傾きよりも大きいところでは安定です。逆の場合は不安定ということがわかります。



安定



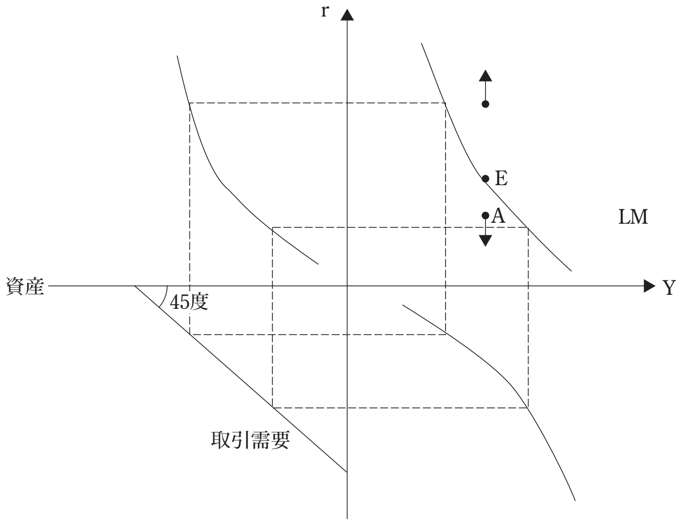
安定と不安定の領域にわかれる。

ただし、このように、LM 曲線が右下がりの場合で、調整が LM 曲線に向かうとは、取引需要が国民所得水準の減少関数の場合です。極めて実際にはありえない場合と考えられます。

第 3 項　LM 曲線が右下がりで調整が LM 曲線から離れる場合

LM 線が右下がりとは、金融資産に対する需要が利子率に関して、利子率が低くても、元本が保障されている方を好んでいて、その故に利子率が上がる方が貨幣需要が増加すると考えるほうが無難なように思えます。

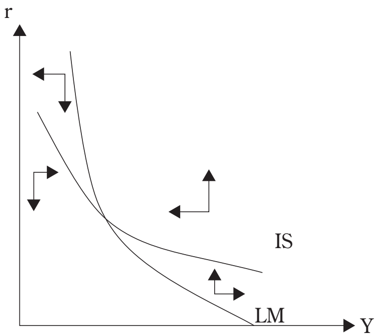
安定条件の②の条件は書き直すと、IS 曲線の傾き＜LM 曲線の傾きとなります。不安定とは、LM 曲線の傾きが、IS 曲線の傾きより小さいときです。IS 曲線は右下りですから、この不安定なときは、LM 曲線も右下りです。これを図示すると、



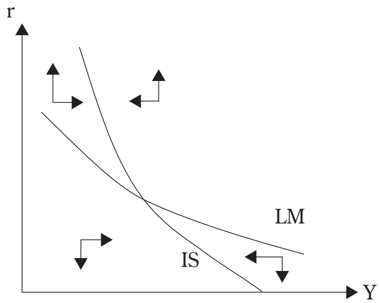
となり、 $\dfrac{\partial L_2}{\partial r}$ は正となることがわかります。つまり、利子率が高くなるほど、貨幣保有が増加するような行動をとっていることになります。

この場合の不均衡からの調整はA点では、取引需要は均衡のE点と同じです。資産動機による貨幣需要はE点より少なくなります。貨幣市場は超過供給なので、利子率は下がります。つまり、人々の貨幣、債券に対する行動はLM曲線自体に、つまり均衡に戻る方向に動いていないことになります。人々がこのように、元本割れを恐れてあるいは短い保有期間を求めて、低い利子を選好する場合を、IS曲線と組み合せてみましょう[2]。

[2] 利子率が上昇するほど貨幣保有が増加するとは、人々が利子率の低い債券を利子率の高い債券より選好していることになります。元本保障とか、債券の保有期間が短いなどの条件の違いによって起こり得ると考えます。これを利子率以外の条件はすべて同一（元本保障はない、流動性の違いはない）と解釈する論者もいると思いますが、合理的な経済人を考える場合ceteris paribusで低い利子率の債券を選好するということはありえません。



LM の傾き＜IS の傾き（安定）



LM の傾き＞IS の傾き（不安定）

このように、通常の LM 曲線から乖離したときの調整が、LM 曲線より離れる様に動く、と考えると、右側が全域的に不安定となります。

この場合の不安定とは、利子率が下落したときに、投資が増えるよりも、貨幣需要が増えてしまう状態です。人々は安全、安定を求めて、資産を貨幣で保有しようとし、一方企業は将来に対する期待が低いので投資しようとしない場合に相当すると思われます。将来に対する長期期待の改善（長期期待の上向き）が重要な役割を果たします。

参考文献

サミュエルソン、P. A.、『経済分析の基礎』、佐藤隆三訳、勁草書房、1967年。

Dernburg and McDougall, Macroeconomics : The Measurement, Analysis, and Control of Aggregate Economic Activity, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1980.