供給複占市場の
動学的最適戦略*

藤本　浩明†
入江　雅仁‡

要約: 本稿では、需要量と供給量とが常に清算される供給複占市場を動学的に考察する。その際、競争相手の供給者が数量調整をおこなうことを仮定した。この仮定を状態方程式を用いて記述すると、クールノー＝ナッシュの供給複占静学モデルは動学モデルへと拡張される。本稿の目的は、最適制御の観点から、そのような供給複占市場における動学解（モデルの定常解や異時間的均衡解など）および供給者の最適供給戦略（最適制御法）を分析することである。果たして、例えば、競争相手の調整係数 (η) と割引率 (ρ) とは動学解に重要な役割を持つこと、その異時間的均衡解は、静学モデルのクールノー＝ナッシュ解と共謀解との線形結合で表される可能性が示される。したがって、非協力的価格設定者の動学ゲームの枠組みの中で、異時間的定常均衡解が完全競争解に収束する可能性、すなわち、価格享受者となりうる可能性が存在しうることなどが示される。

JEL CLASSIFICATION: C61, C73, D43, L13

KEY WORDS: 供給複占市場、数量調整、状態方程式、クールノー＝ナッシュ解、共謀解、線形結合、完全競争解、動学モデル、異時間的均衡解、最適制御法

1. はじめに

供給寡占市場の理論分析をおこなう場合、一般的な教科書（例えば、ヘンダーソン＝クォントの p.278 や岩田の p.28 等を見よ。）では、寡占モデルへ拡張可能なクールノー (＝ナッシュ) の複占モデルがまず第一に取りあげられる：供給複占市場を分析する際に、クールノーは、各複占供給者が供給量についての決定をおこなうにあたって、競争相手の供給量は変化しないという、もっとも単純な供給者間の相互依存関係を考えている；その後、Bowley (1924) によって明示的に取り入れられ、Frisch (1933) の推測的係数 (Conjectural coeffecient) に由来して、Hicks (1935) は、供給者間の依存関係を推測的変動 (Conjectural variation) と名

*この研究は平成１７年度福岡大学研究推進部重点化「ＥＣＢ金融政策研究チーム (054001)」の成果の一部である。この場をお借りして関係者各位に感謝申し上げます。

†福岡大学経済学部教授
‡九州大学大学院生物資源環境科学府博士課程後期在学中

付けた；この概念を使うことによってはじめて、静学の複占モデル（独占＝複占共謀モデル、クールノー＝ナッシュモデル、あるいは完全競争モデルなど）が統一的に整理されていった。[1]

一方で、Simaan and Takayama (1978) は、価格の運動方程式に基づく動学的調整仮定を明示的にモデルへ導入することで、供給複占市場の動学的問題を研究した。その後、Fershtman and Kamien (1987) や Fujimoto and Park (2003) が価格の運動方程式に基づく微分ゲームモデルを進展させ、動学の均衡解である開ループ均衡解と閉ループ均衡解がクールノー均衡解と完全競争均衡解の凸結合で表されることを明らかにした。

また、入江ら (2004) は、藤本 (1997) が微分ゲームモデルで定義した推測変量パラメータの考えを応用することで、推測的変動が明示的に導入された微分ゲームモデルを構築し、動学の均衡解を求めるとともに、推測的変動、割引率、供給者の数、需要者の期待などのパラメータがその均衡解に及ぼす影響を分析した。

さらに、入江ら (2005) は、推測的変動だけでなく相互反応項 (Interaction term) も考慮した微分ゲームモデルで寡占市場を考察し、相互反応項の相違によって、動学の均衡解に違いが生じることを明らかにした。

しかしながら、上記の微分ゲームによる一連の研究では、価格の状態方程式を見る限り、需要曲線のシフトを取り扱った需要者と供給者間のゲーム、すなわち、需要者と供給者間の垂直的関係のみに注目しているため、供給寡占者間・複占者間の競争の本質である数量調整過程、いわゆる供給者間相互の水平的競争ゲームを明示的に取り扱うことができないという問題を抱えているように見える。結局、供給寡占・複占市場における一連の動学的問題を解決するためには、供給者間の水平的競争に重点を置いた状態方程式を導入した上で、価格の運動方程式を導入する必要があるように思える。

そこで、本稿では、第２節から第４節において、供給者間の水平的競争を状態方程式として明示的に組み込んだ複占市場の動学モデルを展開し、定常解や相軌道を分析する。そして、第５節では、初期値に依存しない最適供給戦略（最適

[1]なお、岩田 (1974) や鈴木 (1991, 1994) らは、静学的な推測的変動モデルに基づいた実証モデルを使って、寡占（複占）市場を実証的に分析している。しかしながら、静学的な推測的変動モデルでは、均衡に到達するまでの一連の時間的な調整経路を明示的に追跡できないため、均衡の動学的安定性を分析できないという問題や繰り返し行動を変更する競争相手の戦略的行動に応じた当該供給者の最適な供給戦略が想定されないという問題を抱えている。

制御法）を分析する。また、第６節においては、数値例をあげ、異時間的均衡解が完全競争解に収束する可能性があることなどを示す。最後の節で、本稿のまとめをおこない、今後の課題を言及する。

2. 分析モデル

同質な財を生産する二人の供給者が同時にその財を市場へ供給していると仮定する。この複占市場で、当該供給者が時間 t に制御する供給量を $u(t)$ で表し、この供給者の費用関数を

$$c(u(t)) = \sigma\, u(t) + \frac{\tau}{2}\{u(t)\}^2$$

と仮定する。ただし、パラメータ σ は実数で、もう一つのパラメータ τ は正である。

また、時間 t における競争相手の供給量を $x(t)$ とし、任意の時間 t において、市場は清算している（需要量＝供給量）と仮定する。このとき、各供給者が時間 t に直面する価格 $p(t)$ は、以下の逆需要関数によって決定されると仮定する：

$$p(t) = \alpha - \beta\{u(t) + x(t)\}. \tag{1}$$

ただし、正のパラメータ $\alpha(>\sigma)$ および β は、それぞれ、逆需要関数の切片および傾きを表している。

さらに、供給量を、当該供給者の供給量よりも多くあるいは少なく、調整することで、一時的な利益をあげられると考える競争相手は、数量調整に基づいて、供給量を同時に決定していると仮定する：

$$\dot{x}(t) = \eta\{u(t) - x(t)\}, \tag{2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

ただし、$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$ は時間 t における競争相手の供給量の時間変化率であり、x_0 は競争相手の供給量の初期値である。なお、本稿ではパラメータ η を競争相手の調整係数と呼ぶ。[2]

[2] 例えば、『現代経済学』 ヘンダーソン＝クォント $p.243$ を見よ：超過需要が正であることは、現在の価格で供給される以上の量を、買手たちが購入しようとしていることを意味する；このときには買手たちの間の競争によって価格が上昇するであろう；一方、超過需要が負であることは、現在の価格で買手たちが買おうとしている以上の量を、売手たちが供給していることを意味する；このときには、売手たちの間の競争によって、価格が下落することになろう。

この競争相手の調整係数 η が正 $(\eta > 0)$ ならば、当該供給者の供給量が競争相手の供給量を上回っている $(u(t) > x(t))$ 場合に、競争相手は供給量を増加させ、逆に、競争相手の供給量が当該供給者の供給量を上回っている $(x(t) > u(t))$ 場合に、競争相手は供給量を減少させる。一方、競争相手の調整係数 η が負 $(\eta < 0)$ ならば、競争相手の供給量が当該供給者の供給量を上回っている $(x(t) > u(t))$ 場合に、競争相手は供給量を増加させ、逆に、当該供給者の供給量が競争相手の供給量を上回っている $(u(t) > x(t))$ 場合に、競争相手は供給量を減少させる。

以上の仮定に加えて、当該供給者は、競争相手の意思決定に直接的な影響を及ぼすことができないので、競争相手の供給量を観測しながら、割引かれた利潤を一定期間 T に渡って最大化し続けると仮定する。この場合、当該供給者の利潤汎関数 J は、

$$J = \int_0^T [p(t)\,u(t) - \sigma\,u(t) - \frac{\tau}{2}\{u(t)\}^2]\,e^{-\rho\,t}dt$$

となる。ただし、$\rho(\neq 0)$ は割引率パラメータであり、$e(\approx 2.71828)$ は自然対数の底である。このとき、(1) 式より、当該供給者は、(2) 式および (3) 式の下で、

$$J = \int_0^T \left([\alpha - \beta\,\{u(t) + x(t)\}]\,u(t) - \sigma\,u(t) - \frac{\tau}{2}\{u(t)\}^2\right) e^{-\rho\,t}dt \qquad (4)$$

の最大化を図ることになる。

3. 定常解の分析

初めに、分析モデルの定常解を考察する。

さて、共状態変数 $y(t)$ を用いて、以下のような増大ハミルトニアン H を定義する：

$$H \equiv [\alpha - \beta\,\{u(t) + x(t)\}]\,u(t) - \sigma\,u(t) - \frac{\tau}{2}\{u(t)\}^2 + y(t)\,\eta\,\{u(t) - x(t)\}.$$

また、共状態変数の時間変化率を $\dot{y}(t) \equiv \frac{dy(t)}{dt}$ で定義すると、最大化原理の必要条件は、(2) 式、および、

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\beta\,u(t) + \alpha - \beta\,\{u(t) + x(t)\} - \sigma - \tau\,u(t) + \eta\,y(t) = 0, \qquad (5)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -\{-\beta\,u(t) - \eta\,y(t)\} = \dot{y}(t) - \rho\,y(t), \qquad (6)$$

となる。さらに、境界条件を (3) 式、および、

$$y(T) - \vec{y} = 0 \tag{7}$$

とする。このとき、最適制御は、(5) 式より、

$$u(t) = -\frac{\beta}{2\beta+\tau}\,x(t) + \frac{\eta}{2\beta+\tau}\,y(t) + \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau} \tag{8}$$

を満たしている。この (8) 式を (2) 式および (6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \eta\,u(t) - \eta\,x(t)\\ &= \eta\,\{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}\,x(t) + \frac{\eta}{2\beta+\tau}\,y(t) + \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau}\} - \eta\,x(t)\\ &= -(\frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau} + \eta)\,x(t) + \frac{\eta^2}{2\beta+\tau}\,y(t) + \frac{(\alpha-\sigma)\,\eta}{2\beta+\tau},\end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \beta\,u(t) + (\rho+\eta)\,y(t)\\ &= \beta\{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}\,x(t) + \frac{\eta}{2\beta+\tau}\,y(t) + \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau}\} + (\rho+\eta)\,y(t)\\ &= -\frac{\beta^2}{2\beta+\tau}\,x(t) + (\rho + \frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau} + \eta)\,y(t) + \frac{(\alpha-\sigma)\,\beta}{2\beta+\tau}\end{aligned}$$

となり、これらを行列表記に書き改めることで、非同次正準方程式体系

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(\frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau}+\eta) & \frac{\eta^2}{2\beta+\tau}\\ -\frac{\beta^2}{2\beta+\tau} & \rho+\frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau}+\eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\frac{(\alpha-\sigma)\,\eta}{2\beta+\tau}\\ -\frac{(\alpha-\sigma)\,\beta}{2\beta+\tau}\end{bmatrix} \tag{9}$$

を得る。ここで、ベクトル

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &\equiv \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix},\\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) &\equiv \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} \equiv \begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{b} &\equiv \begin{bmatrix}-\frac{(\alpha-\sigma)\,\eta}{2\beta+\tau}\\ -\frac{(\alpha-\sigma)\,\beta}{2\beta+\tau}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

および、行列

$$\boldsymbol{A} \equiv \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}-(\frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau}+\eta) & \frac{\eta^2}{2\beta+\tau}\\ -\frac{\beta^2}{2\beta+\tau} & \rho+\frac{\beta\,\eta}{2\beta+\tau}+\eta\end{bmatrix} \tag{10}$$

を定義すると、(9) 式は、

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{b} \tag{11}$$

と表される。このとき、(9) 式あるいは (11) 式から、次の命題を得る。

命題 1 (2) 式の下で、(4) 式を最大にする問題の異時間的均衡状態は、もしそれが存在するとしたならば、

$$\vec{x} = \frac{\rho\,(3\,\beta+\tau)\,x^{CN} + \eta\,(4\,\beta+\tau)\,x^{CL}}{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)}, \tag{12}$$

$$\vec{u} = \frac{\rho\,(3\,\beta+\tau)\,u^{CN} + \eta\,(4\,\beta+\tau)\,u^{CL}}{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)}, \tag{13}$$

および、

$$\vec{p} = \frac{\rho\,(3\,\beta+\tau)\,p^{CN} + \eta\,(4\,\beta+\tau)\,p^{CL}}{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)} \tag{14}$$

である。

□ **証明:** 異時間的均衡状態を求めるために、(9) 式および (11) 式において、$\underline{\dot{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix}\dot{x}(t) & \dot{y}(t)\end{bmatrix} \equiv \underline{\boldsymbol{0}}$ とおく。ただし、記号 $\underline{\quad}$ は、行列またはベクトルの転置を表している。ここで、均衡点を $\underline{\vec{\boldsymbol{x}}} \equiv \begin{bmatrix}\vec{x} & \vec{y}\end{bmatrix}$ とすると、

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b} \tag{15}$$

が成立する。この (15) 式にクラメールの公式を適用すると、競争相手の異時間的均衡供給量 $\vec{x}$ および共状態変数の異時間的均衡状態 $\vec{y}$ が計算できる。そこで、行列式を記号 $|\quad|$ で表し、(15) 式の係数行列、すなわち、(10) 式の行列式を計算すると、

$$|\boldsymbol{A}| = -\tfrac{\eta}{2\,\beta+\tau}\,\{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)\}$$

となる。したがって、競争相手の異時間的均衡供給量 $\vec{x}$ は、

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} -\frac{(\alpha-\sigma)\,\eta}{2\,\beta+\tau} & \frac{\eta^2}{2\,\beta+\tau} \\ -\frac{(\alpha-\sigma)\,\beta}{2\,\beta+\tau} & \rho + \frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau} + \eta \end{vmatrix} \\ &= \frac{\rho\,(\alpha-\sigma) + \eta\,(\alpha-\sigma)}{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)} \end{aligned} \tag{16}$$

で与えられ、静学解 (72) 式および (77) 式を考慮すると、(12) 式が得られる。また、共状態変数の異時間的均衡状態 $\bar{y}$ は、

$$\bar{y} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} -(\frac{\beta\eta}{2\beta+\tau}+\eta) & -\frac{(\alpha-\sigma)\eta}{2\beta+\tau} \\ -\frac{\beta^2}{2\beta+\tau} & -\frac{(\alpha-\sigma)\beta}{2\beta+\tau} \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{\beta(\alpha-\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} \tag{17}$$

となる。次に、(16) 式および (17) 式を (8) 式に代入すると、当該供給者の異時間的均衡供給量 $\bar{u}$ は、

$$\bar{u} = -\frac{\beta}{2\beta+\tau}\,\frac{(\rho+\eta)(\alpha-\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} + \frac{\eta}{2\beta+\tau}\left\{-\frac{\beta(\alpha-\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)}\right\} + \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau}$$
$$= \frac{\rho(\alpha-\sigma)+\eta(\alpha-\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} \tag{18}$$

で与えられる。ここで、静学解 (73) 式および (78) 式を考慮すると、(13) 式が得られる。最後に、$\bar{x}=\bar{u}$ が成立する事を考慮して、(17) 式あるいは (18) 式を (1) 式に代入すると、異時間的均衡価格 $\bar{p}$ は、

$$\bar{p} = \alpha - 2\beta\,\frac{\rho(\alpha-\sigma)+\eta(\alpha-\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)}$$
$$= \frac{\rho(\alpha\beta+\alpha\tau+2\beta\sigma)+\eta(2\alpha\beta+\alpha\tau+2\beta\sigma)}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} \tag{19}$$

となり、静学解 (74) 式および (79) 式から (14) 式が得られる。■ **証了**

この命題 1 は、異時間的均衡状態に影響を及ぼす要因が競争相手の調整係数と割引率であることを表していると同時に、競争相手の調整係数が正の場合には、異時間的均衡状態が静学のクールノー解と共謀解を結んだ直線の内分点となること、一方、競争相手の調整係数が負の場合には、静学のクールノー解と共謀解を結んだ直線の外分点となることを示している。

系 1 異時間的均衡状態 (12) 式、(13) 式、および、(14) 式は、以下のような極限に収束する。

□ **証明:** 異時間的均衡状態 (12) 式、(13) 式、および、(14) 式に極限操作を施す

と、それぞれ、

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to\infty}\vec{x} &= \lim_{\eta\to\infty}\frac{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)x^{CN}+(4\beta+\tau)x^{CL}}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = x^{CL};\\
\lim_{\eta\to\infty}\vec{u} &= \lim_{\eta\to\infty}\frac{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)u^{CN}+(4\beta+\tau)u^{CL}}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = u^{CL};\\
\lim_{\eta\to\infty}\vec{p} &= \lim_{\eta\to\infty}\frac{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)p^{CN}+(4\beta+\tau)p^{CL}}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = p^{CL},
\end{aligned}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to0}\vec{x} &= \lim_{\rho\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)x^{CN}+\eta(4\beta+\tau)x^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = x^{CL};\\
\lim_{\rho\to0}\vec{u} &= \lim_{\rho\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)u^{CN}+\eta(4\beta+\tau)u^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = u^{CL};\\
\lim_{\rho\to0}\vec{p} &= \lim_{\rho\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)p^{CN}+\eta(4\beta+\tau)p^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = p^{CL},
\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to0}\vec{x} &= \lim_{\eta\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)x^{CN}+\eta(4\beta+\tau)x^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = x^{CN};\\
\lim_{\eta\to0}\vec{u} &= \lim_{\eta\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)u^{CN}+\eta(4\beta+\tau)u^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = u^{CN};\\
\lim_{\eta\to0}\vec{p} &= \lim_{\eta\to0}\frac{\rho(3\beta+\tau)p^{CN}+\eta(4\beta+\tau)p^{CL}}{\rho(3\beta+\tau)+\eta(4\beta+\tau)} = p^{CN},
\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to\infty}\vec{x} &= \lim_{\rho\to\infty}\frac{(3\beta+\tau)x^{CN}+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)x^{CL}}{(3\beta+\tau)+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)} = x^{CN};\\
\lim_{\rho\to\infty}\vec{u} &= \lim_{\rho\to\infty}\frac{(3\beta+\tau)u^{CN}+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)u^{CL}}{(3\beta+\tau)+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)} = u^{CN};\\
\lim_{\rho\to\infty}\vec{p} &= \lim_{\rho\to\infty}\frac{(3\beta+\tau)p^{CN}+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)p^{CL}}{(3\beta+\tau)+\frac{\eta}{\rho}(4\beta+\tau)} = p^{CN}
\end{aligned}\tag{23}$$

となる。また、異時間的均衡状態 (16) 式、(18) 式、および、(19) 式に極限操作を施すと、静学解 (67) 式、(68) 式、および、(69) 式から、

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\vec{x} &= \lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\frac{\frac{\rho}{\eta}(\alpha-\sigma)+(\alpha-\sigma)}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = x^{CM};\\
\lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\vec{u} &= \lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\frac{\frac{\rho}{\eta}(\alpha-\sigma)+(\alpha-\sigma)}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = u^{CM};\\
\lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\vec{p} &= \lim_{\eta\to-\frac{\rho}{2}}\frac{\frac{\rho}{\eta}(\alpha\beta+\alpha\tau+2\beta\sigma)+(2\alpha\beta+\alpha\tau+2\beta\sigma)}{\frac{\rho}{\eta}(3\beta+\tau)+(4\beta+\tau)} = p^{CM}
\end{aligned}\tag{24}$$

となる。■ **証了**

この系 1 の (20) 式および (21) 式から、競争相手が調整を強めるような状況、または、現在の利潤と将来の利潤を同程度に評価するような状況では、異時間的

均衡状態が共謀解に一致することがわかる。また、この系 1 の (22) 式および (23) 式から、競争相手の供給量は変化しないというクールノーの仮定が成立するときや将来の利潤を重視するようなときには、異時間的均衡状態がクールノー解に近づくことがわかる。さらに、(24) 式から、競争相手の調整係数が $-\frac{\rho}{2}$ に近づくならば、その動学モデルの均衡解が静学の完全競争均衡解に一致することがわかる。

4. 相軌道の分析

次に、最大化原理から導出された (9) 式または (11) 式の相軌道を考察する。さて、ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ を均衡点 $\vec{\boldsymbol{x}}$ だけ平行移動した新たなベクトル

$$\boldsymbol{\phi}(t) \equiv \begin{bmatrix} z(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \vec{x} \\ y(t) - \vec{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(t) - \vec{\boldsymbol{x}},$$

および、その時間変化率

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \equiv \frac{d\boldsymbol{\phi}(t)}{dt} \equiv \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix}$$

を定義し、(11) 式および (15) 式を考慮すると、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{b} \\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\vec{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}\,\vec{\boldsymbol{x}} \\ \frac{d}{dt}\{\boldsymbol{x}(t) - \vec{\boldsymbol{x}}\} &= \boldsymbol{A}\{\boldsymbol{x}(t) - \vec{\boldsymbol{x}}\} \end{aligned}$$

が成立する。したがって、最大化原理から導出された (9) 式または (11) 式に対応する同次正準方程式体系は、

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

および、

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\phi}(t) \tag{26}$$

となる。ただし、(10) 式から、行列 A の各要素は、以下の通りである：

$$a_{11} = -\left(\frac{\beta\,\eta}{2\,\beta + \tau} + \eta\right), \qquad a_{12} = \frac{\eta^2}{2\,\beta + \tau},$$
$$a_{21} = -\frac{\beta^2}{2\,\beta + \tau}, \qquad a_{22} = \rho + \frac{\beta\,\eta}{2\,\beta + \tau} + \eta.$$

さらに、(25) および (26) 式の境界条件は、(7) 式から、

$$\zeta(T) = y(T) - \bar{y} = 0 \tag{27}$$

である。このとき、(10) 式から、次の定理を得る。

定理 1 競争相手の調整係数が正 $(\eta > 0)$ ならば、均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は鞍形点となる。

□ **証明:** ここで、(10) 式の固有値を r 、また、2×2 の単位行列を $\boldsymbol{I}_2$ とすると、(10) 式の特性方程式は、

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} - r\,\boldsymbol{I}_2| &= \begin{vmatrix} -(\frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau} + \eta) - r & \frac{\eta^2}{2\,\beta+\tau} \\ -\frac{\beta^2}{2\,\beta+\tau} & \rho + \frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau} + \eta - r \end{vmatrix} \\
&= (r + \frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau} + \eta)\,(r - \rho - \frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau} - \eta) + (\frac{\beta\,\eta}{2\,\beta+\tau})^2 \\
&= r^2 - \rho\,r - \frac{\eta}{2\,\beta+\tau}\,\{\rho\,(3\,\beta+\tau) + \eta\,(4\,\beta+\tau)\} \\
&= r^2 - (a_{11} + a_{22})\,r + |A| = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

となる。もし競争相手の調整係数が正 $(\eta > 0)$ ならば、(10) 式の行列式が負 $(|A| < 0)$ となるので、(28) 式の判別式は正 $(\rho^2 - 4\,|A| > 0)$ となる。このとき、(28) 式の解すなわち (10) 式の固有値は、2 次方程式の解の公式から、

$$r_1 = \frac{(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,|A|}}{2}, \tag{29}$$

$$r_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,|A|}}{2} \tag{30}$$

で与えられる。したがって、競争相手の調整係数が正 $(\eta > 0)$ ならば、固有値の半分が負で、残りの半分が正 $(r_1 < 0 < r_2)$ となるので、均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ は鞍形点となる。なお、虚数固有値などの研究は、今後の課題とする。■ **証了**

この定理 1 は、競争相手の調整係数が正 $(\eta > 0)$ の場合には、均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ に収束する固有直線と均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ から発散する固有直線が存在すること、また、相軌道が、均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ の周りで、峠の近くでの等高線に沿うような形で描かれることを示唆している。

さて、相軌道を、相軌道上における接線の傾きの観点から、考察するために、スカラ $K(t)$ を用いて、線形のレギュレータ

$$\zeta(t) = K(t)\,z(t) \tag{31}$$

を定義する。このとき、(31) 式の時間微分は、

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{K}(t)\, z(t) + K(t)\, \dot{z}(t) \tag{32}$$

である。(32) 式は、(25) 式から、

$$a_{21}\, z(t) + a_{22}\, \zeta(t) = \dot{K}(t)\, z(t) + K(t)\, \{a_{11}\, z(t) + a_{12}\, \zeta(t)\}$$

と変形できる。さらに、(31) 式を考慮すると、

$$a_{21}\, z(t) + a_{22}\, K(t)\, z(t) = \dot{K}(t)\, z(t) + K(t)\, a_{11}\, z(t) + K(t)\, a_{12}\, K(t)\, z(t)$$

$$\{\dot{K}(t) + K(t)\, a_{12}\, K(t) + K(t)\, a_{11} - a_{22}\, K(t) - a_{21}\}\, z(t) = 0$$

と展開できるので、任意の $z(t)(\neq 0)$ に対して、リカッチの微分方程式

$$\dot{K}(t) = -K(t)\, a_{12}\, K(t) - K(t)\, a_{11} + a_{22}\, K(t) + a_{21} \tag{33}$$

が成立する。なお、(33) 式の境界条件は、(27) 式および (31) 式から、

$$K(T) = 0 \tag{34}$$

である。

さて、リカッチの微分方程式 (33) 式を解くために、線形の微分方程式体系

$$\dot{U}(t) = a_{11}\, U(t) + a_{12}\, L(t) \tag{35}$$

$$\dot{L}(t) = a_{21}\, U(t) + a_{22}\, L(t) \tag{36}$$

を考察する。ただし、ある値の存在を表す記号を ∃ とすると、この線形の微分方程式体系 (35) 式および (36) 式の境界条件は、

$$U(T) =^{\exists}\, U_T \neq 0, \qquad L(T) = 0 \tag{37}$$

である。このとき、次の補題が導かれる。

補題 1 (37) 式を満足する (35) 式および (36) 式の正則な解 $U(t)$ および $L(t)$ が存在すれば、

$$\mathbb{K}(t) = L(t)\, U(t)^{-1} \tag{38}$$

は、(34) 式を満たす、リカッチの微分方程式 (33) 式の解である。

□ **証明:** 正則な解 $U(t)$ に対して、

$$U(t)\,U^{-1} = 1$$

が成立するので、両辺を時間微分すると、

$$\dot{U}(t)\,U^{-1} + U(t)\,\dot{U}^{-1}(t) = 0$$

となるので、正則な解 $U(t)$ の逆行列の時間微分は、

$$\dot{U}^{-1}(t) = -U^{-1}(t)\,\dot{U}(t)\,U^{-1}(t)$$

で与えられる。したがって、(35) 式および (36) 式を満足する $U(t)$ および $L(t)$ から構成される (38) 式の時間微分は、

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbb{K}} &= \dot{L}(t)\,U^{-1}(t) + L(t)\,\dot{U}^{-1}(t)\\
&= \dot{L}(t)\,U^{-1}(t) + L(t)\,\{-U^{-1}(t)\,\dot{U}(t)\,U^{-1}(t)\}\\
&= \{a_{21}\,U(t) + a_{22}\,L(t)\}\,U^{-1}(t) - \mathbb{K}(t)\,\{a_{11}\,U(t) + a_{12}\,L(t)\}\,U^{-1}(t)\\
&= a_{21} + a_{22}\,\mathbb{K}(t) - \mathbb{K}(t)\,a_{11} - \mathbb{K}(t)a_{12}\,\mathbb{K}(t)
\end{aligned}$$

となり、これを整理すると、(33) 式を得る。また、正則な解 $U(t)$ および $L(t)$ は、(37) 式を満たすので、(38) 式の境界条件は、

$$\mathbb{K}(T) = L(T)\,U(T)^{-1} = 0 \times U_T^{-1} = 0$$

となり、(34) 式を満たしている。■ **証了**

この補題 1 は、(35) 式および (36) 式の解を求めることができれば、(33) 式の解を求めることができることを示唆している。

そこで、(35) 式および (36) 式を

$$\dot{\varphi}(t) = \boldsymbol{A}\,\varphi(t) \tag{39}$$

という行列表現になおして、問題を考察する。ただし、$\varphi(t)$ は、

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} U(t) \\ L(t) \end{bmatrix}$$

で定義されており、境界条件

$$\varphi(T) = \begin{bmatrix} U(T) \\ L(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_T \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

を満たしている。また、ジョルダン正則行列を

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

で定義し、正則な固有行列を

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{41}$$

とする。なお、正則な固有行列の逆行列は、

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & -Q_{11}\,P_{12}\,P_{22}^{-1} \\ P_{22}^{-1}\,P_{21}\,Q_{11} & P_{22}^{-1} + P_{22}^{-1}\,P_{21}\,Q_{11}\,P_{12}\,P_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

である。ただし、Q_{11} は、

$$Q_{11} = (P_{11} - P_{12}\,P_{22}^{-1}\,P_{21})^{-1}$$

で定義されている。このとき、次の補題が導かれる。

補題 2 (39) 式の解は、

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{P}\,e^{\boldsymbol{\Lambda}\,(t-T)}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,\boldsymbol{\varphi}(T) \tag{43}$$

で与えられる。

□ **証明:** 定数ベクトル $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ を用いて、(39) 式の一般解を

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\boldsymbol{A}\,t}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}} \tag{44}$$

とおくと、

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = (\frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}\,t})\,\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{A}\,e^{\boldsymbol{A}\,t}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\varphi}(t)$$

が成立するので、(44) 式は (39) 式の一般解である。この (44) 式に $t = T$ を代入すると、

$$\boldsymbol{\varphi}(T) = e^{\boldsymbol{A}\,T}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}}$$

となる。このとき、

$$(e^{\boldsymbol{A}\,T})^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}\,T}$$

を考慮すると、定数ベクトル $\overline{\boldsymbol{\varphi}}$ は、

$$\overline{\boldsymbol{\varphi}} = e^{-\boldsymbol{A}\,T}\,\boldsymbol{\varphi}(T)$$

で与えられる。また、(10) 式と (41) 式の間には、$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}$ という関係が成立するので、(10) 式を

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{P}^{-1} \tag{45}$$

と変形することができるので、(39) 式の特殊解は、

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\boldsymbol{A}\,t}\,e^{-\boldsymbol{A}\,T}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}} = e^{\boldsymbol{A}\,(t-T)}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}} = e^{\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,(t-T)}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}}$$

となる。ここで、$e^{\boldsymbol{\Lambda}\,(t-T)}$ および $e^{\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{P}^{-1}}$ のテーラー展開

$$e^{\boldsymbol{\Lambda}\,(t-T)} = \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{\Lambda}\,(t-T) + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{\Lambda}^2\,(t-T)^2 + \cdots$$

および

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,(t-T)} &= \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{P}^{-1}\,(t-T) + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{\Lambda}^2\,\boldsymbol{P}^{-1}\,(t-T)^2 + \cdots \\ &= \boldsymbol{P}\,\{\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{\Lambda}\,(t-T) + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{\Lambda}^2\,(t-T)^2 + \cdots\}\,\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}\,e^{\boldsymbol{\Lambda}\,(t-T)}\,\boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned}$$

を用いると、(43) 式が導かれる。■ **証了**

さて、$F(t)$ および $G(t)$ を

$$F(t) \equiv P_{11}\,e^{r_1\,(t-T)} - P_{12}\,e^{r_2\,(t-T)}\,P_{22}^{-1}\,P_{21} \tag{46}$$

$$G(t) \equiv P_{21}\,e^{r_1\,(t-T)} - P_{22}\,e^{r_2\,(t-T)}\,P_{22}^{-1}\,P_{21} \tag{47}$$

で定義すると、二つの補題から、次の定理が導かれる。

定理 2 (34) 式を満たすような (33) 式の解は、もしそれが存在するならば、

$$K(t) = G(t)\,F(t)^{-1} \tag{48}$$

で与えられる。

□ **証明:** 補題 2 の (43) 式は、(41) 式および (42) 式から、

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \boldsymbol{P}\, e^{\boldsymbol{\Lambda}\,(t-T)}\, \boldsymbol{P}^{-1}\, \varphi(T) \\
&= \begin{bmatrix} P_{11}\, e^{r_1\,(t-T)} & P_{12}\, e^{r_2\,(t-T)} \\ P_{21}\, e^{r_1\,(t-T)} & P_{22}\, e^{r_2\,(t-T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}\, U_T \\ -P_{22}^{-1}\, P_{21}\, Q_{11}\, U_T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{11}\, e^{r_1\,(t-T)}\, Q_{11}\, U_T + P_{12}\, e^{r_2\,(t-T)} \{-P_{22}^{-1}\, P_{21}\, Q_{11}\, U_T\} \\ P_{21}\, e^{r_1\,(t-T)}\, Q_{11}\, U_T + P_{22}\, e^{r_2\,(t-T)} \{-P_{22}^{-1}\, P_{21}\, Q_{11}\, U_T\} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \{P_{11}\, e^{r_1\,(t-T)} - P_{12}\, e^{r_2\,(t-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, Q_{11}\, U_T \\ \{P_{21}\, e^{r_1\,(t-T)} - P_{22}\, e^{r_2\,(t-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, Q_{11}\, U_T \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

と変形できるので、(40) 式を満たす (39) 式の解は、(46) 式および (47) 式から、

$$U(t) = F(t)\, Q_{11}\, U_T \tag{49}$$

$$L(t) = G(t)\, Q_{11}\, U_T \tag{50}$$

となる。ここで、(49) 式および (50) 式を (38) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
K(t) &= L(t)\, U(t)^{-1} \\
&= G(t)\, Q_{11}\, U_T\, U_T^{-1}\, Q_{11}^{-1}\, F(t)^{-1}
\end{aligned}
$$

となるので、(48) 式が導かれる。なお、(46) 式および (47) 式に $t = T$ を代入すると、

$$F(T) = P_{11}\, e^{\boldsymbol{\Lambda}_1\,(T-T)} - P_{12}\, e^{\boldsymbol{\Lambda}_2\,(T-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21} = P_{11} - P_{12}\, P_{22}^{-1}\, P_{21} = Q_{11}^{-1},$$

および

$$G(T) = P_{21}\, e^{\boldsymbol{\Lambda}_1\,(T-T)} - P_{22}\, e^{\boldsymbol{\Lambda}_2\,(T-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21} = P_{21} - P_{21} = 0$$

が成立するので、境界条件

$$K(T) = G(T)\, F(T)^{-1} = 0 \times Q_{11} = 0$$

を満足する。■ **証了**

この定理から、次の系が導かれる。

系 2 終期時点 T が所与の場合、時間 t が無限に経過する $(t \to \infty)$ と、固有直線を除いた相軌道上における接線の傾きは、鞍形点（の均衡点）$\bar{\boldsymbol{x}}$ から発散する固有直線の傾き $P_{22}\, P_{12}^{-1}$ に一致する。

□ **証明:** (29) 式および (30) 式から、

$$r_1 - r_2 = -\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,|A|} < 0$$

が成立し、また、(31) 式から、相軌道上における接線の傾きは $K(t)$ で与えられることがわかるので、(48) 式に極限操作を施すと、(46) 式および (47) 式から、

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} K(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{\{P_{21}\, e^{(r_1-r_2)\,(t-T)} - P_{22}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, e^{r_2\,(t-T)}}{\{P_{11}\, e^{(r_1-r_2)\,(t-T)} - P_{12}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, e^{r_2\,(t-T)}} \\ &= P_{22}\, P_{12}^{-1} \qquad (51)\end{aligned}$$

となる。■ **証了**

系 3 終期時点 T が無限 $(T \to \infty)$ の場合、固有直線を除いた相軌道上における接線の傾きは、鞍形点（の均衡点） $\bar{x}$ に収束する固有直線の傾き $P_{21}\, P_{11}^{-1}$ に一致する。

□ **証明:** (29) 式および (30) 式から、

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,|A|} > 0$$

が成立し、また、(31) 式から、相軌道上における接線の傾きは $K(t)$ 式で与えられることがわかるので、(48) 式に極限操作を施すと、(46) 式および (47) 式から、

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} K(t) &= \lim_{T\to\infty} \frac{\{P_{21} - P_{22}\, e^{(r_2-r_1)\,(t-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, e^{r_1\,(t-T)}}{\{P_{11} - P_{12}\, e^{(r_2-r_1)\,(t-T)}\, P_{22}^{-1}\, P_{21}\}\, e^{r_1\,(t-T)}} \\ &= P_{21}\, P_{11}^{-1} \qquad (52)\end{aligned}$$

となる。■ **証了**

5. 最適制御の分析

最後に、状態に依存した形の最適制御を考察する。

さて、(3) 式を考慮せずに、終期時点 T から初期時点 0 に遡って問題を考えることで得られた前節の定理を踏まえて、(8) 式で与えられる最適制御を定めると、以下の命題を得る。

命題 2 (2) 式の下で、(4) 式を最大にする問題の初期値に依存しない最適制御 $u_T^*(t)$ は、

$$u_T^*(t) = \bar{u} + \{-\frac{\beta}{2\,\beta + \tau} + \frac{\eta}{2\,\beta + \tau}\, G(t)\, F(t)^{-1}\}\, \{x(t) - \bar{x}\} \qquad (53)$$

で与えられる。

□ **証明:** (8) 式から (18) 式を引き、(31) 式と定理 4 を考慮すると、

$$
\begin{aligned}
u(t)-\vec{u} &= -\frac{\beta}{2\beta+\tau}\{x(t)-\vec{x}\}+\frac{\eta}{2\beta+\tau}\{y(t)-\vec{y}\} \\
&= -\frac{\beta}{2\beta+\tau}z(t)+\frac{\eta}{2\beta+\tau}\zeta(t) \\
&= -\frac{\beta}{2\beta+\tau}z(t)+\frac{\eta}{2\beta+\tau}K(t)\,z(t) \\
&= \{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}+\frac{\eta}{2\beta+\tau}G(t)\,F(t)^{-1}\}z(t)
\end{aligned}
\tag{54}
$$

が成立する。この (54) 式の左辺にある均衡値 $\vec{u}$ を移項すると、(53) 式が得られる。■ **証了**

この命題は、問題を逆向きに考察することで、時間と競争相手の供給量に応じた最適な供給量が計算できることを示唆している。したがって、当該供給者の最適な供給戦略は、供給する時期と競争相手の動向に応じて、変化することになる。

系 4 終期時点 T が所与の場合に、時間 t が無限に経過する $(t\to\infty)$ と、初期値に依存しない最適制御は、

$$
u^*_{\mathcal{T}}(t)=\vec{u}+\{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}+\frac{\eta}{2\beta+\tau}P_{22}\,P_{12}^{-1}\}\{x_{\mathcal{T}}(t)-\vec{x}\}
\tag{55}
$$

となる。ただし、$x_{\mathcal{T}}(t)$ は、それが存在すると仮定した上で、以下のように定義される変数である：

$$
x_{\mathcal{T}}(t)\equiv\lim_{t\to\infty}x(t).
\tag{56}
$$

□ **証明:** 命題 2 の最適制御 (53) 式に極限操作を施すと、

$$
\begin{aligned}
u^*_{\mathcal{T}}(t) &\equiv \lim_{t\to\infty}u^*_T(t) \\
&= \vec{u}+\{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}+\frac{\eta}{2\beta+\tau}\lim_{t\to\infty}K(t)\}\{\lim_{t\to\infty}x(t)-\vec{x}\}
\end{aligned}
$$

となり、系 2 の (51) 式および新たに定義された (56) 式を考慮すると、(55) 式を得る。■ **証了**

系 5 終期時点 T が無限 $(T\to\infty)$ の場合、最適制御法は、

$$
u^*_{\infty}(t)=\vec{u}+\{-\frac{\beta}{2\beta+\tau}+\frac{\eta}{2\beta+\tau}P_{21}\,P_{11}^{-1}\}\{x(t)-\vec{x}\}
\tag{57}
$$

で与えられる。

□ **証明:** 命題 2 の最適制御 (53) 式に極限操作を施すと、

$$\begin{aligned} u^*_\infty(t) &\equiv \lim_{T\to\infty} u^*_T(t) \\ &= \vec{u} + \{-\frac{\beta}{2\beta+\tau} + \frac{\eta}{2\beta+\tau}\lim_{T\to\infty} K(t)\}\{x(t)-\vec{x}\} \end{aligned}$$

となり、系 3 の (52) 式を考慮すると、(57) 式を得る。■ **証了**

すなわち、時間視野が無限で、価格と競争相手の供給量に応じて最適な供給量を決定している場合には、均衡へ収束する制御が見出されることを示唆している。

以上の初期値に依存しない最適制御を踏まえると、次の命題を得る。

命題 3 初期値に依存しない最適制御が与えられた時に、以下の偏微分が成り立つ:

$$\frac{\partial u^*_T(t)}{\partial x(t)} = -\frac{\beta}{2\beta+\tau} + \frac{\eta}{2\beta+\tau}G(t)\,F(t)^{-1}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial u^*_T(t)}{\partial x_T(t)} = -\frac{\beta}{2\beta+\tau} + \frac{\eta}{2\beta+\tau}P_{22}\,P_{12}^{-1}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial u^*_\infty(t)}{\partial x(t)} = -\frac{\beta}{2\beta+\tau} + \frac{\eta}{2\beta+\tau}P_{21}\,P_{11}^{-1}. \tag{60}$$

□ **証明:** 命題 2 、系 4 、および、系 5 の最適制御 (53) 式、(55) 式、および、(57) 式を偏微分すると、(58) 式、(59) 式、および、(60) 式を得る。■ **証了**

6. 数値例

ここで、以下に２つの数値例を用いて、具体的な計算結果を提示する。

まずは、分析モデルの各パラメータを以下のように設定すると、動学の均衡点の定常解が、静学モデルの内分点（凸結合）となる場合を得る：

$$\alpha = 130, \beta = 0.5, \eta = 30, \rho = 12, \sigma = 10, \tau = 1, x_0 = 50, T = 1. \tag{61}$$

このとき、静学モデルの均衡解、および、動学モデルの均衡解は、

$$\begin{array}{llll} x^{CL} = 40; & \vec{x} = 42; & x^{CN} = 48; & x^{CM} = 60; \\ u^{CL} = 40; & \vec{u} = 42; & u^{CN} = 48; & u^{CM} = 60; \\ p^{CL} = 90; & \vec{p} = 88; & p^{CN} = 82; & p^{CM} = 70; \end{array}$$

および

$$\vec{y} = -0.5$$

となる。なお、動学の各均衡解を凸結合で表現しなおすと、以下の通りである：

$$
\begin{aligned}
42 = \vec{x} &= \frac{30\,x^{CN} + 90\,x^{CL}}{30+90},\\
42 = \vec{u} &= \frac{30\,u^{CN} + 90\,u^{CL}}{30+90},\\
88 = \vec{p} &= \frac{30\,p^{CN} + 90\,p^{CL}}{30+90}.
\end{aligned}
$$

また、(61) 式から、行列 $\boldsymbol{A}$ の各要素は、

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -37.5, \quad a_{12} = 450,\\
a_{21} &= -0.125, \quad a_{22} = 49.5
\end{aligned}
$$

であり、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値は、

$$r_1 = -36.8486 \tag{62}$$

$$r_2 = 48.8486 \tag{63}$$

となる。さらに、固有値 (62) 式および (63) 式に対応する固有ベクトルを

$$
\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0014 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1919 \end{bmatrix}
$$

と選択した場合、

$$P_{21} = 0.0014,$$

$$P_{22} = 0.1919$$

は、固有ベクトルの傾きを表している。ここで、(9) 式あるいは (11) の一般解は、

$$
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.0014 \end{bmatrix} e^{-36.8486\,t}\,\mu_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1919 \end{bmatrix} e^{48.8486\,t}\,\mu_2 + \begin{bmatrix} 42 \\ -0.5 \end{bmatrix}
$$

となる。さて、終期時点 T から初期時点 0 に遡って問題を考えた場合、(33) 式の解を構成する $F(t)$ および $G(t)$ は、

$$
\begin{aligned}
F(t) &= e^{-36.8486\,(t-1)} - e^{48.8486\,(t-1)}\,\frac{0.0014}{0.1919}\\
G(t) &= 0.0014\,e^{-36.8486\,(t-1)} - 0.1919\,e^{48.8486\,(t-1)}\,\frac{0.0014}{0.1919}
\end{aligned}
$$

となる。なお、系 2 の (51) 式および系 3 の (52) 式は、

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = P_{22} = 0.1919,$$
$$\lim_{T\to\infty} K(t) = P_{21} = 0.014$$

である。また、終期時点 T から初期時点 0 に遡って問題を考えることで得られる初期値に依存しない各最適制御は、

$$u_T^*(t) = 42 + \{-0.25 + 15\,G(t)\,F(t)^{-1}\}\,\{x(t) - 42\}$$
$$u_{\mathcal{T}}^*(t) = 42 + (-0.25 + 15 \times 0.1919)\{x(t) - 42\} = 42 + 2.6285\,\{x(t) - 42\}$$
$$u_\infty^*(t) = 42 + (-0.25 + 15 \times 0.0014)\{x(t) - 42\} = 42 - 0.2290\,\{x(t) - 42\}$$

で与えられる。したがって、命題 3 の各偏微分は、

$$\frac{\partial u_T^*(t)}{\partial x(t)} = -0.25 + 15\,G(t)\,F(t)^{-1}$$
$$\frac{\partial u_{\mathcal{T}}^*(t)}{\partial x_{\mathcal{T}}(t)} = 2.6285$$
$$\frac{\partial u_\infty^*(t)}{\partial x(t)} = -0.2290$$

となり、動学の均衡点の定常解 $(\vec{p})$ が、静学モデルの協力ゲーム的な共謀解 (p^{CL}) と非協力クールノー解 (p^{CN}) の内分点 $(p^{CL} > \vec{p} > p^{CN} > p^{CM})$ となっていることが示された。

上述の分析モデルのパラメータのうち、数量調整パラメータ (η) を 30 から 2 へ設定し、割引率を表わすパラメータ (ρ) を符号を変えて、マイナスの値にしてみよう。この場合、動学の均衡点の定常解が、静学モデルの外分点（線形結合）となる場合を得る：

$$\alpha = 130, \beta = 0.5, \eta = 2, \rho = -12, \sigma = 10, \tau = 1, x_0 = 50, T = 1. \tag{64}$$

このとき、静学モデルの均衡解、および、動学モデルの均衡解は、

$$\begin{array}{llll}
x^{CL} = 40; & x^{CN} = 48; & \vec{x} = 50; & x^{CM} = 60; \\
u^{CL} = 40; & u^{CN} = 48; & \vec{u} = 50; & u^{CM} = 60; \\
p^{CL} = 90; & p^{CN} = 82; & \vec{p} = 80; & p^{CM} = 70;
\end{array}$$

および

$$\vec{y} = 2.5$$

となる。なお、動学の各均衡解を線形結合で表現しなおすと、以下の通りである：

$$
\begin{aligned}
50 = \vec{x} &= \frac{-30\,x^{CN} + 6\,x^{CL}}{-30+6}, \\
50 = \vec{u} &= \frac{-30\,u^{CN} + 6\,u^{CL}}{-30+6}, \\
80 = \vec{p} &= \frac{-30\,p^{CN} + 6\,p^{CL}}{-30+6}.
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} K(t) = P_{22}\,P_{12}^{-1} = -3.4821, \\
&\lim_{T\to\infty} K(t) = P_{21}\,P_{11}^{-1} = -0.01795
\end{aligned}
$$

となり、命題 3 の各偏微分は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_T^*(t)}{\partial x(t)} &= -0.25 + G(t)\,F(t)^{-1} \\
\frac{\partial u_{\mathcal{T}}^*(t)}{\partial x_{\mathcal{T}}(t)} &= -3.7321 \\
\frac{\partial u_\infty^*(t)}{\partial x(t)} &= -0.26795
\end{aligned}
$$

となり、動学の均衡点の定常解 $(\vec{p})$ が、静学モデルの価格設定者的な共謀解 (p^{CL}) とクールノー解 (p^{CN}) の外分点 $(p^{CL} > p^{CN} > \vec{p} > p^{CM})$ となっており、静学モデルの非協力ゲームの完全競争解 (p^{CM}) に近い。したがって、動学的な非協力ゲームの枠組みの中では、価格享受者の可能性もありうることが示された。

7. おわりに

本稿では、需要量と供給量とが常に清算される供給複占市場を動学的に考察した。その際、競争相手の供給者が数量調整をおこなうことを仮定した。第 2 節において、この仮定を状態方程式を用いて記述することによって、供給者間の水平的競争を明示的に組み込んだ動学モデルを構築することができた。結果として、最適制御の観点から、供給複占市場における異時間的均衡および当該供給者の最適供給戦略など多くのことが以下のように判明した。

- 異時間的均衡が、クールノー解と共謀解の線形結合であらわされること、
- 競争相手の調整係数と割引率が動学モデルの均衡解に影響を及ぼしていること、

- 競争相手の調整係数の値に応じて、静学のさまざまな均衡解が求まること、
- 異時間的均衡が、競争相手の調整係数が正の場合には、鞍形点となること

などを明かにした。これによって、本稿で提示した動学モデルは、複占市場の推測的変動モデルを新たな観点から展開したモデルである可能性が示された。また、

- 当該供給者の最適供給戦略が、競争相手の供給量と時間の関数として与えられること、
- 当該供給者が長期的な視野を持つ場合に、安定的な供給戦略が確立されること、

などを明かにしたことで、競争相手の供給量に応じた安定的な供給戦略を確立するためには、長期的な視野に立った戦略が重要であることを示した。

最後に、残された課題について言及する。

まず、数量調整に基づく状態方程式に加えて、価格の状態方程式を導入することである。なぜならば、これによって初めて、供給者間の水平的競争だけでなく、需要者と供給者の垂直的関係に基づく市場環境の変化を明示的に組み込んだ動学モデルを構築することが可能となるからである。

つぎは、本稿のモデルを利用して、応用、例えば、ユーロ市場あるいは寡占的農産物市場などにおける実態の解明ができるかどうかを実証的に検証することが必要である。なぜならば、経済主体の行動様式に関する実証研究が進展しないと、均衡の安定性や競争の作用を定量的に評価できないからである。また、モデルの妥当性を実際のデータから検証した上で、本稿で提示したモデルを政策シミュレーションなどに応用すれば、具体的かつ実践的な政策の立案が期待されるからである。

さらに、実態に即した実証研究を進めるためには、本稿で提示したモデルを改良したより精密なモデルの開発が必要である。例えば、本稿では、数量調整に基づいた供給者間の水平的競争に注目したけれども、価格や代替財などの要因が供給者間の相互依存関係に影響を及ぼしている可能性もあるので、実証的な観点から、モデルを改良していくことも必要である。また、複占市場から寡占市場へとモデルを拡張することなども必要であろう。

文　献

Bowley, A. L.　1924　*The Mathematical Groundwork of Economics.* Oxford University Press, England, pp.36–38

荏開津典生　2003　農業経済学　第２版. 岩波書店, 東京

Fershtman, C. and M. Kamien　1987　Dynamic Duopolistic Competiton with Sticky Prices. *Econometrica*, **55**(5)：1151–1164

Frisch, R.　1933　Monopoly-Polypoly-The Concept of Force in the Economy. *International Economic Papers*, **1**：23–26

藤本浩明　1997　公共財の自発的貢献の動学モデル:協力の可能性. 福岡大学経済学論叢, **41**：357–384

藤本浩明　2000　*LQ* 最適制御について. 福岡大学経済学論叢, **44**：289–321

Hiroaki, Fujimoto.　2004　A Closed Loop Solution to the Coase's Conjecture with Increasing Marginal Costs. 福岡大学経済学論叢, **48**：145–182

Fujimoto, H. and E. S. Park　2003　Dynamic Duopoly with Sticky Prices. 福岡大学経済学論叢, **47**：717–731

Fujimoto, H. and E. S. Park　2004　On the Differential Equations of the Riccati Type with a Price Discrimination Matrix. 福岡大学経済学論叢, **49**：161–186

Hicks, J. R.　1935　Annual Survey of Economic Theory：the Theory of Monopoly. *Econometrica*, **3**(1)：1–20

入江雅仁・鈴木宣弘・前田幸嗣　2004　推測的変動と供給寡占の動学モデル. 九州大学大学院農学研究院学芸雑誌, **59**(2)：247–254

入江雅仁・鈴木宣弘・前田幸嗣　2005　寡占的市場の動学分析. 九州大学大学院農学研究院学芸雑誌, **60**(2)：287–296

岩田暁一　1974　寡占価格への計量的接近. 東洋経済新報社, 東京：1–8, 22–43, 111–128

加藤寛一郎　1987　最適制御入門　レギュレータとカルマン・フィルタ. 東京大学出版会, 東京：39–54

小宮隆太郎・兼光秀郎訳　1973　J.M. ヘンダーソン・R.E. クォント：現代経済学　増訂版. 創文社, 東京

森本光生　1987　パソコンによる微分方程式. 朝倉書店, 東京

中山伊知郎訳　1982　A. クールノー：富の理論の数学的原理に関する研究. 日本経済評論社, 東京

西村和雄　1995　ミクロ経済学入門　第２版. 岩波書店, 東京

大住栄治・小田正雄・高森寛・堀江義訳　1995　A.C. チャン：現代経済学の数学基礎（上）. シーエーピー出版, 東京

大住栄治・小田正雄・高森寛・堀江義訳　1995　A.C. チャン：現代経済学の数学基礎（下）. シーエーピー出版, 東京

奥野正寛・鈴村興太郎　1988　ミクロ経済学Ⅱ. 岩波書店, 東京：173–194

大和瀬達二・上原一男訳　1970　R. フリッシュ・H. v. シュタッケルベルク・J. R. ヒックス：寡占論集. 至誠堂, 東京：3–22, 189–216

鈴木宣弘　1991　推測的変動による不完全競争市場のモデル化と政策変更効果の計測—生乳市場を事例として—. 農業経済研究, **63**(1) :11–21

鈴木宣弘　1994　生乳市場の不完全競争の実証分析. 農林統計協会, 東京：1–64

鈴木宣弘　2002　寡占的フードシステムへの計量的接近. 農林統計協会, 東京

Simaan, M. and T. Takayama　1978　Game Theory Applied to Dynamic Duopoly Problems with Production Constraints. *Automatica*, **14** : 161–166

土屋圭造　1970　農業経済学. 東洋経済新報社, 東京

Varian, H. R.　1992　*Microeconomic Analysis*, 3rd ed. W. W. Norton, New York, pp.285–308

付　録：静学分析

この付録では、本文中の動学モデルに関係する静学モデルを考察する。

初めに、各供給者が価格を所与として行動する場合の静学モデル、すなわち、完全競争モデルを考察する。さて、当該供給者の利潤を π_i 、競争相手の利潤を π_j とすると、各供給者の利潤最大化問題は、

$$\begin{aligned} &\max_u \ \pi_i = p\,u - \sigma\,u - \frac{\tau}{2}u^2 \\ &\max_x \ \pi_j = p\,x - \sigma\,x - \frac{\tau}{2}x^2 \end{aligned} \tag{65}$$

と書ける。このとき、(65) 式についての 1 階の条件は、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi_i}{\partial u} = p - \sigma - \tau\,u = 0 \\ &\frac{\partial \pi_j}{\partial x} = p - \sigma - \tau\,x = 0 \end{aligned} \tag{66}$$

で与えられる。この (66) 式と (1) 式から、以下の連立方程式体系を得る：

$$\begin{bmatrix} \beta & \beta+\tau \\ \beta+\tau & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-\sigma \\ \alpha-\sigma \end{bmatrix}.$$

ここで、クラメールの公式を適用するのに必要な行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \beta & \beta+\tau \\ \beta+\tau & \beta \end{vmatrix} = (\beta+\beta+\tau)\,(\beta-\beta-\tau), \\ &\begin{vmatrix} \alpha-\sigma & \beta+\tau \\ \alpha-\sigma & \beta \end{vmatrix} = (\alpha-\sigma)\,(\beta-\beta-\tau), \\ &\begin{vmatrix} \beta & \alpha-\sigma \\ \beta+\tau & \alpha-\sigma \end{vmatrix} = (\alpha-\sigma)\,(\beta-\beta-\tau) \end{aligned}$$

となる。したがって、完全競争均衡解は、

$$x^{CM} = \frac{(\alpha-\sigma)(\beta-\beta-\tau)}{(\beta+\beta+\tau)(\beta-\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau}, \tag{67}$$

$$u^{CM} = \frac{(\alpha-\sigma)(\beta-\beta-\tau)}{(\beta+\beta+\tau)(\beta-\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{2\beta+\tau} \tag{68}$$

となる。また、(67) 式と (68) 式を (1) 式に代入すると、完全競争均衡価格 p^{CM} は、

$$p^{CM} = \frac{\alpha(2\beta+\tau)-2\beta(\alpha-\sigma)}{2\beta+\tau} = \frac{\alpha\tau+2\beta\sigma}{2\beta+\tau} \tag{69}$$

となる。

次に、クールノーモデルを考察する。この場合、各供給者の利潤最大化問題は、

$$\begin{aligned} &\max_{u}\ \pi_i = \{\alpha-\beta(u+x)\}u - \sigma u - \frac{\tau}{2}u^2 \\ &\max_{x}\ \pi_j = \{\alpha-\beta(u+x)\}x - \sigma x - \frac{\tau}{2}x^2 \end{aligned} \tag{70}$$

と書ける。このとき、(70) 式についての 1 階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi_i}{\partial u} &= -\beta u + \alpha - \beta(u+x) - \sigma - \tau u = 0 \\ \frac{\partial\pi_j}{\partial x} &= -\beta x + \alpha - \beta(u+x) - \sigma - \tau x = 0 \end{aligned} \tag{71}$$

で与えられる。この (71) 式から、以下の連立方程式体系を得る：

$$\begin{bmatrix} \beta & 2\beta+\tau \\ 2\beta+\tau & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-\sigma \\ \alpha-\sigma \end{bmatrix}.$$

ここで、クラメールの公式を適用するのに必要な行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \beta & 2\beta+\tau \\ 2\beta+\tau & \beta \end{vmatrix} &= (\beta+2\beta+\tau)(\beta-2\beta-\tau), \\ \begin{vmatrix} \alpha-\sigma & 2\beta+\tau \\ \alpha-\sigma & \beta \end{vmatrix} &= (\alpha-\sigma)(\beta-2\beta-\tau), \\ \begin{vmatrix} \beta & \alpha-\sigma \\ 2\beta+\tau & \alpha-\sigma \end{vmatrix} &= (\alpha-\sigma)(\beta-2\beta-\tau) \end{aligned}$$

となる。したがって、クールノー解は、

$$x^{CN} = \frac{(\alpha-\sigma)(\beta-2\beta-\tau)}{(\beta+2\beta+\tau)(\beta-2\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{3\beta+\tau}, \tag{72}$$

$$u^{CN} = \frac{(\alpha-\sigma)(\beta-2\beta-\tau)}{(\beta+2\beta+\tau)(\beta-2\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{3\beta+\tau} \tag{73}$$

となる。また、(72) 式と (73) 式を (1) 式に代入すると、クールノー均衡価格 p^{CN} は、

$$p^{CN} = \frac{\alpha(3\beta+\tau) - 2\beta(\alpha-\sigma)}{3\beta+\tau} = \frac{\alpha\beta + \alpha\tau + 2\beta\sigma}{3\beta+\tau} \tag{74}$$

となる。

最後に、共謀モデルを考察する。この場合、各供給者の利潤最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{u,x}\ \pi &= \pi_i + \pi_j \\ &= \{\alpha - \beta(u+x)\}(u+x) - \sigma u - \frac{\tau}{2}u^2 - \sigma x - \frac{\tau}{2}x^2 \end{aligned} \tag{75}$$

と書ける。このとき、(75) 式についての 1 階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u} &= -\beta(u+x) + \alpha - \beta(u+x) - \sigma - \tau u = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial x} &= -\beta(u+x) + \alpha - \beta(u+x) - \sigma - \tau x = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

で与えられる。この (76) 式から、以下の連立方程式体系を得る：

$$\begin{bmatrix} 2\beta & 2\beta+\tau \\ 2\beta+\tau & 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha-\sigma \\ \alpha-\sigma \end{bmatrix}.$$

ここで、クラメールの公式を適用するのに必要な行列式を計算すると、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2\beta & 2\beta+\tau \\ 2\beta+\tau & 2\beta \end{vmatrix} &= (2\beta+2\beta+\tau)(2\beta-2\beta-\tau), \\ \begin{vmatrix} \alpha-\sigma & 2\beta+\tau \\ \alpha-\sigma & 2\beta \end{vmatrix} &= (\alpha-\sigma)(2\beta-2\beta-\tau), \\ \begin{vmatrix} 2\beta & \alpha-\sigma \\ 2\beta+\tau & \alpha-\sigma \end{vmatrix} &= (\alpha-\sigma)(2\beta-2\beta-\tau) \end{aligned}$$

となる。したがって、共謀解は、

$$x^{CL} = \frac{(\alpha-\sigma)(2\beta-2\beta-\tau)}{(2\beta+2\beta+\tau)(2\beta-2\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{4\beta+\tau}, \tag{77}$$

$$u^{CL} = \frac{(\alpha-\sigma)(2\beta-2\beta-\tau)}{(2\beta+2\beta+\tau)(2\beta-2\beta-\tau)} = \frac{\alpha-\sigma}{4\beta+\tau} \tag{78}$$

となる。また、(77) 式と (78) 式を (1) 式に代入すると、共謀均衡価格 p^{CL} は、

$$p^{CL} = \frac{\alpha(4\beta+\tau) - 2\beta(\alpha-\sigma)}{4\beta+\tau} = \frac{2\alpha\beta + \alpha\tau + 2\beta\sigma}{4\beta+\tau} \tag{79}$$

となる。