

# 対数一般化ガンマ分布の形状について

鍵 原 理 人\*

## 1 序論

無限区間  $(0, \infty)$  上に定義される指数分布は、連続型の確率分布として最も基本的な分布の一つである。その指数分布に従う確率変数に対して負の指数変換を施せば、新たに単位区間  $(0, 1)$  に値を取る確率変数が導かれ、かつ、その分布は一様分布に一致する。単位区間  $(0, 1)$  上に定義される一様分布は、指数分布と同様にして、連続型の確率分布として最も基本的な分布である。

上述の事実に基づいて、鍵原 (2020) は、指数分布を始めとしてガンマ分布や Weibull 分布を特殊な場合として包含する一般化ガンマ分布に従う確率変数に対して、その負の指数変換によって導かれる分布 (対数一般化ガンマ分布) について議論する。実際、対数一般化ガンマ分布は、一様分布を始めとして、対数ガンマ分布や対数 Weibull 分布を特殊な場合として包含する。対数ガンマ分布は、Consul and Jain (1971) や Grassia (1977), Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994), pp.383–384, Crooks (2019) pp.67–71 によって議論され、単位ガンマ分布とも呼ばれる。また、対数 Weibull 分布は、単位 Weibull 分布として Mazucheli, Menezes and Ghitany (2018) によって提案された (Mazucheli, Menezes, Fernandes, de Oliveira and Ghitany 2020 参照)。対数ガンマ分布や対数 Weibull 分布と同じように、対数一般化ガンマ分布もまた単位一般化ガンマ分布と呼ばれ得る。

---

\*福岡大学経済学部, e-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

Grassia (1977) と Mazucheli, Menezes, Fernandes, de Oliveira and Ghitany (2020) は、それぞれ対数ガンマ分布と対数 Weibull 分布について母数と密度の形状の関係を体系的に提示する。それらの分布を特殊な場合として包含する対数一般化ガンマ分布については、その標準型について、鍵原 (2020) が母数と密度の形状の関係を体系的に提示する。本稿は、鍵原 (2020) において課題として残されていた一般の場合について、対数一般化ガンマ分布の母数と密度の形状の関係を体系的に検討し、その結果として得られる知見を命題として整理する (命題 1 参照)。これにより、その特殊な場合である標準型や対数ガンマ分布、対数 Weibull 分布の母数と密度の形状の関係について統一的な視点に基づいた知見が提示される。

本稿は、以下において、次のように構成される。まず、第 2 節において、一般化ガンマ分布から対数一般化ガンマ分布を構成する。次に、第 3 節において、対数一般化ガンマ分布の一般の場合について、その母数と密度の形状の関係を体系的に検討し、その結果として得られる知見を命題 1 として提示する。以上の検討の過程で得られる密度関数の増減表については全て補論 A に提示し、密度関数のグラフについては全て補論 B に提示する。なお、補論において提示される図については全て Maple を用いての作図であり、本文中において提示される図については全て R を用いての作図である。最後に、第 4 節で結論を述べる。

## 2 対数一般化ガンマ分布

任意の正の実数  $\alpha > 0$  に対して、積分  $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  は存在する (例えば、犬井 1962, p.1 や杉浦 1980, pp.295-296 参照)。この事実に注意すると、この積分は、 $\alpha$  の関数と見做され得て、ガンマ関数と呼ばれる：

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

ここで、等号  $:=$  はその左辺をその右辺によって定義することを意味する。任意の正の実数  $x \in (0, \infty)$  に対して  $x^{\alpha-1} e^{-x} > 0$  であるので、積分の性質

により、ガンマ関数は常に正値を取ることが分かる。即ち、任意の正の実数  $\alpha > 0$  に対して  $\Gamma(\alpha) > 0$  である。

さて、ガンマ分布とは、ガンマ関数を正規化定数として密度関数を構成した確率分布である。つまり、次の (2) 式において無限区間  $(0, \infty)$  上に定義される密度関数  $g_*$  を持つ確率分布はガンマ分布（特に、その標準型とか標準ガンマ分布）と呼ばれ、 $\alpha$  は形状母数と呼ばれる ( $\alpha > 0$ ) :

$$g_*(u|\alpha) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-u}, \quad u > 0. \quad (2)$$

実際、 $\alpha > 0$  と  $\Gamma(\alpha) > 0$  に注意すると、任意の正の実数  $u \in (0, \infty)$  に対して  $u^{\alpha-1} e^{-u} > 0$  であるので  $g_*(u|\alpha) > 0$  を得る。また、ガンマ関数の定義に注意すると、 $\int_0^\infty g_*(u|\alpha) du = 1$  を得る。よって、関数  $g_*$  は、非負値性と正規化条件を満たすので、確かに密度関数である。

## 2.1 一般化ガンマ分布：標準型と尺度分布族

一般化ガンマ分布とは、ガンマ分布に従う確率変数（ガンマ確率変数）の中変換の分布である。即ち、(2) 式で定義される密度関数  $g_*$  と確率変数  $U \sim g_*$  に対して、正の実数  $\beta$  による  $U$  の中変換を  $V := U^\beta$ ,  $\beta > 0$  と表記すれば、確率変数  $V$  の分布を一般化ガンマ分布という。ここで、 $V$  は  $U$  と同じく無限区間  $(0, \infty)$  に値を取る確率変数であることに注意する。

さて、 $V$  の分布関数を  $G_0$  と表記すると、その定義により、 $0 < v < \infty$  なる  $v$  に対して、次の展開を得る：

$$G_0(v|\alpha, \beta) := P(V \leq v) = P\left(U \leq v^{\frac{1}{\beta}}\right) = G_*\left(v^{\frac{1}{\beta}}|\alpha\right).$$

但し、 $P(V \leq v)$  は確率変数  $V$  の実現値が実数  $v$  以下になるという事象の確率を表し、 $G_*$  は  $U$  の分布関数を表す。よって、 $V$  の密度関数  $g_0$  は、その分布関数  $G_0$  の導関数として得られるので、

$$G_*\left(v^{\frac{1}{\beta}}|\alpha\right) = \int_0^{v^{\frac{1}{\beta}}} g_*(u|\alpha) du$$

に注意すると、次式として得られる：

$$g_0(v|\alpha, \beta) = \frac{d}{dv} G_0(v|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} g_* \left( v^{\frac{1}{\beta}} | \alpha \right) v^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

従って、 $0 < v < \infty$  なる  $v$  に対して、 $V$  の密度関数  $g_0$  は次式となる ( $0 < \alpha, \beta < \infty$ )：

$$g_0(v|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} v^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-v^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (3)$$

ここで、母数を  $\gamma := 1/\beta$  と改めて表記し直すと、 $V := U^\beta = U^{1/\gamma}$  の密度関数  $g_0$  の別表現が得られる ( $0 < \alpha, \gamma < \infty$ )：

$$g_0(v|\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} v^{\gamma\alpha-1} e^{-v^\gamma}, \quad 0 < v < \infty. \quad (4)$$

(3) 式もしくは (4) 式で定義された密度関数  $g_0$  を持つ確率分布を一般化ガンマ分布 (特に、その標準型とか標準一般化ガンマ分布) といい、 $\alpha$  と  $\beta$  (または  $\gamma$ ) を形状母数という。以下においては、特に断らない限り、慣用に従って、標準一般化ガンマ分布の密度関数  $g_0$  としては (4) 式の表現を用いる。

通常の場合、標準一般化ガンマ分布の尺度分布族を単に一般化ガンマ分布と呼ぶ。即ち、(4) 式で定義される密度関数  $g_0$  と  $V \sim g_0$ ,  $\sigma > 0$  に対して、 $V$  の尺度変換  $W := \sigma V$  の分布は単に一般化ガンマ分布と呼ばれ、 $\sigma$  は尺度母数と呼ばれる。尺度母数  $\sigma$  の正值性により、 $W := \sigma V$  は、 $V$  と同じく、無限区間  $(0, \infty)$  に値を取る確率変数である。その分布関数を  $G$  と表記すると、その定義により、 $w > 0$  なる  $w$  に対して、

$$G(w|\alpha, \gamma, \sigma) := P(W \leq w) = P\left(V \leq \frac{w}{\sigma}\right) = \int_0^{\frac{w}{\sigma}} g_0(v|\alpha, \gamma) dv$$

であり、その密度関数  $g$  は  $G$  の導関数として導出される：

$$g(w|\alpha, \gamma, \sigma) = \frac{d}{dw} G(w|\alpha, \gamma, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g_0\left(\frac{w}{\sigma} \mid \alpha, \gamma\right).$$

従って、 $w > 0$  なる  $w$  に対して、 $W$  の密度関数  $g$  は次式として得られる ( $0 < \alpha, \gamma, \sigma < \infty$ ):

$$g(w|\alpha, \gamma, \sigma) = \frac{\gamma}{\sigma\Gamma(\alpha)} \left(\frac{w}{\sigma}\right)^{\gamma\alpha-1} e^{-\left(\frac{w}{\sigma}\right)^\gamma}. \quad (5)$$

ここで、尺度母数  $\sigma$  を改めて  $\eta := (1/\sigma)^\gamma$  と表記し直すと、 $W := \sigma V = (1/\eta)^{1/\gamma} V$  の密度関数  $g$  の別表現が得られる ( $0 < \alpha, \gamma, \eta < \infty$ ):

$$g(w|\alpha, \gamma, \eta) = \frac{\gamma\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\gamma\alpha-1} e^{-\eta w^\gamma}. \quad (6)$$

(5) 式や (6) 式で定義された密度関数  $g$  を持つ確率分布は、標準一般化ガンマ分布の尺度分布族として構成された分布であり、通常の場合、単に一般化ガンマ分布と呼ばれる。以下においては、特に断らない限り、一般化ガンマ分布の密度関数  $g$  として (6) 式の表現を用いることにする。

さて、一般化ガンマ分布の密度関数 (6) 式は、 $\sigma = 1 \iff \eta = 1$  の場合、標準一般化ガンマ分布の密度関数 (4) 式に帰着する： $g(w|\alpha, \gamma, 1) = g_0(w|\alpha, \gamma)$ ,  $w > 0$ . また、(6) 式は、 $\gamma = 1$  の場合、ガンマ分布の密度関数

$$g(w|\alpha, 1, \eta) = \frac{\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\alpha-1} e^{-\eta w}, \quad 0 < w < \infty$$

に帰着する。これは、(2) 式で定義される密度関数  $g_*$  を持つ標準ガンマ分布の尺度分布族の密度関数に他ならない。そして、 $\Gamma(1) = 1$  に注意すると、 $\alpha = 1$  の場合、(6) 式は Weibull 分布の密度関数に帰着することが分かる：

$$g(w|1, \gamma, \eta) = \gamma\eta w^{\gamma-1} e^{-\eta w^\gamma}, \quad 0 < w < \infty.$$

更に、 $\alpha = \gamma = 1$  の場合、(6) 式は指数分布の密度関数に帰着する：

$$g(w|1, 1, \eta) = \eta e^{-\eta w}, \quad 0 < w < \infty.$$

以上により、一般化ガンマ分布の2つの形状母数  $\alpha$  と  $\gamma$  について、 $\alpha$  はガンマ分布の形状母数、 $\gamma$  は Weibull 分布の形状母数に対応することが分かる。

## 2.2 対数一般化ガンマ分布

本節では、(6)式で定義される一般化ガンマ分布に従う確率変数（一般化ガンマ確率変数）に対して負の指数変換を施すことによって、一様分布を始めとして対数ガンマ分布や対数 Weibull 分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族を構成する。即ち、(6)式で定義される一般化ガンマ分布の密度関数  $g$  と  $W \sim g$  に対して、その負の指数変換  $Z := e^{-W}$  の確率分布を導出する。ここで、 $Z$  は単位区間  $(0, 1)$  に値を取る確率変数であることに注意する。さて、 $Z$  の分布関数を  $F$  と表記すると、 $F$  は、その定義により、単位区間  $(0, 1)$  内の任意の実数  $z$  に対して次式と得られる：

$$F(z|\alpha, \gamma, \eta) := P(Z \leq z) = P(W \geq -\log z) = 1 - G(-\log z|\alpha, \gamma, \eta).$$

但し、 $G$  は一般化ガンマ確率変数  $W$  の分布関数である。よって、 $W$  の密度関数が  $g$  であることに注意すれば、

$$G(-\log z|\alpha, \gamma, \eta) = \int_0^{-\log z} g(w|\alpha, \gamma, \eta) dw$$

により、 $Z$  の密度関数  $f$  はその分布関数  $F$  の導関数として得られる：

$$f(z|\alpha, \gamma, \eta) = \frac{d}{dz} F(z|\alpha, \gamma, \eta) = \frac{1}{z} g(-\log z|\alpha, \gamma, \eta).$$

従って、任意の  $z \in (0, 1)$  に対して、 $Z$  の密度関数  $f$  は次式として与えられる ( $0 < \alpha, \gamma, \eta < \infty$ )：

$$f(z|\alpha, \gamma, \eta) = \frac{\gamma \eta^\alpha}{\Gamma(\alpha) z} \left( \log \frac{1}{z} \right)^{\gamma \alpha - 1} \exp \left\{ -\eta \left( \log \frac{1}{z} \right)^\gamma \right\}. \quad (7)$$

(7)式で定義される密度関数  $f$  を持つ確率分布は、一般化ガンマ確率変数の指数変換によって生成される分布であり、対数正規分布の例に従った命名規則を採用すれば、対数一般化ガンマ分布と呼ばれることになる。

対数一般化ガンマ分布の密度関数(7)式は、 $\gamma = 1$  の場合、ガンマ確率変数の指数変換によって生成される分布（対数ガンマ分布または単位ガンマ分布）

の密度関数に帰着する (Consul and Jain 1971 や Grassia 1977, Johnson, Kotz and Balakrishnan 1994, pp.383–384, Crooks 2019, p.67 参照) :

$$f(z|\alpha, 1, \eta) = \frac{\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\eta-1} \left( \log \frac{1}{z} \right)^{\alpha-1}, \quad z \in (0, 1). \quad (8)$$

また, (7) 式は,  $\alpha = 1$  の場合, 対数 Weibull 分布 (単位 Weibull 分布) の密度関数に帰着する (Mazucheli, Menezes, Fernandes, de Oliveira and Ghitany 2020 参照) :

$$f(z|1, \gamma, \eta) = \frac{\gamma\eta}{z} \left( \log \frac{1}{z} \right)^{\gamma-1} \exp \left\{ -\eta \left( \log \frac{1}{z} \right)^\gamma \right\}, \quad z \in (0, 1). \quad (9)$$

なお, 上述とは異なり, ガンマ確率変数や Weibull 確率変数の対数変換を対数ガンマ分布や対数 Weibull 分布と呼ぶ例があることには注意を要する (例えば, Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.3 や Balakrishnan and Nevzorov 2003, p.184, Leemis and McQueston 2008, Rinne 2009, pp.131–133 参照). 最後に, 対数一般化ガンマ分布の密度関数 (7) 式は,  $\eta = 1$  の場合, 標準対数一般化ガンマ分布の密度関数に帰着する (鍵原 2020 参照) :

$$f(z|\alpha, \gamma, 1) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)z} \left( \log \frac{1}{z} \right)^{\gamma\alpha-1} e^{-(\log \frac{1}{z})^\gamma}, \quad z \in (0, 1). \quad (10)$$

以上により, 対数一般化ガンマ分布 ((7) 式) は標準一般化ガンマ分布 ((10) 式) を始めとして対数ガンマ分布 ((8) 式) や対数 Weibull 分布 ((9) 式) を特殊な場合として包含することが判明した.

### 3 対数一般化ガンマ分布の形状

(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は, (6) 式で定義される一般化ガンマ分布の密度関数  $g$  と確率変数  $W \sim g$  に対して, その負の指数変換  $Z := e^{-W}$  の密度関数として導出された ( $0 < \alpha, \gamma, \eta < \infty$ ). ここで,  $W$  と  $Z$  の分布の台はそれぞれ無限区間  $(0, \infty)$  と単位区間  $(0, 1)$  で

あることに注意する。なお、以下においては、次のような略記法を適宜に採用する ( $w \in (0, \infty)$ ,  $z \in (0, 1)$ ):

$$g(w) := g(w|\alpha, \gamma, \eta), \quad f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta).$$

さて、任意の  $z \in (0, 1)$  に対して、

$$f(z) = \frac{1}{z} g(-\log z)$$

であることに注意すると、その両辺を  $z$  で微分することにより、次の関係式が得られる:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \{g(-\log z) + g'(-\log z)\}.$$

ここで、任意の  $w \in (0, \infty)$  に対して

$$g'(w) = \{(\gamma\alpha - 1) - \gamma\eta w^\gamma\} \frac{\gamma\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} w^{\gamma\alpha-2} e^{-\eta w^\gamma}$$

であるので、次式の表現が得られることに注意する:

$$g'(w) = \frac{(\gamma\alpha - 1) - \gamma\eta w^\gamma}{w} g(w).$$

よって、

$$g(w) + g'(w) = \frac{(\gamma\alpha - 1) + w - \gamma\eta w^\gamma}{w} g(w)$$

であるので、次の表現を得る:

$$f'(z) = \frac{g(-\log z)}{z^2 \log z} \{(\gamma\alpha - 1) - \log z - \gamma\eta(-\log z)^\gamma\}, \quad z \in (0, 1).$$

ここで、任意の  $z \in (0, 1)$  に対して、 $z^2 > 0$  と  $\log z < 0$ ,  $g(-\log z) > 0$  であることに注意すると、次の同値関係を得る ( $z \in (0, 1)$ ):

$$\begin{aligned} f'(z) \leq 0 &\iff (\gamma\alpha - 1) + \left\{ \log \frac{1}{z} - \gamma\eta \left( \log \frac{1}{z} \right)^\gamma \right\} \geq 0 \\ &\iff \log \frac{1}{z} - \gamma\eta \left( \log \frac{1}{z} \right)^\gamma \geq 1 - \gamma\alpha. \end{aligned}$$



この同値関係について、対数による  $z$  の単調減少変換を  $w := -\log z \in (0, \infty)$  と表記すると、次の表現を得る：

$$f'(z) \leq 0 \iff D(w) \geq 1 - \gamma\alpha \quad (11)$$

$$\text{但し, } D(w) := w - \gamma\eta w^\gamma, \quad w = -\log z, \quad z \in (0, 1).$$

以下においては、(11) 式で表される同値関係に基づいて、 $\gamma = 1$  の場合 (第 3.2 節) と  $\gamma > 1$  の場合 (第 3.3 節)、 $\gamma < 1$  の場合 (第 3.4 節) の 3 つの場合に大別した上で、(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  について、その形状と母数の関係についての議論を進める。そして、これらの議論を進める為の準備として、まずは、同値関係 (11) 式に現れる関数  $D(w)$ ,  $w \in (0, \infty)$  の符号について考察を加える (第 3.1 節)。最後に、以上の議論によって得られた知見を命題として整理した上で (第 3.5 節)、その特殊な場合について考察する (第 3.6 節)。

### 3.1 導関数の符号条件

本節では、対数一般化ガンマ分布の密度関数 (7) 式の導関数の正負の符号を定める同値関係 (11) 式に現れる関数  $D(w) = w - \gamma\eta w^\gamma$  について、その正負の符号を定める条件を  $w \geq 0$  の範囲で明らかにする。但し、 $\gamma$  と  $\eta$  はいずれも正値であることに注意する。

まず、 $\gamma = 1$  の場合、 $D(w) = w - \eta w = (1 - \eta)w$  と単純化されるので、 $\eta \leq 1 \iff D(w) \geq 0, \forall w > 0$  であり、かつ、 $D(0) = 0, \forall \eta > 0$  であることが分かる。

次に、 $\gamma \neq 1$  の場合について考察する。その為、関数  $D(w)$  の零点を  $w \geq 0$  の範囲で探査する。 $\gamma \neq 1$  の場合、次の同値変形を得る：

$$\begin{aligned} D(w) = 0 &\iff (1 - \gamma\eta w^{\gamma-1})w = 0 \\ &\iff w = 0 \text{ または } 1 - \gamma\eta w^{\gamma-1} = 0. \end{aligned}$$

ここで、

$$1 - \gamma\eta w^{\gamma-1} = 0 \iff w = (\gamma\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

に注意すると、 $\gamma \neq 1$  の場合、任意の  $w \geq 0$  に対して次の同値関係を得る：

$$D(w) := w - \gamma\eta w^\gamma = 0 \iff w = 0 \text{ または } w = (\gamma\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (12)$$

これによって、関数  $D(w)$  の零点が求まった。即ち、以上の議論によって、任意の  $\gamma > 0$  に対して、 $w = 0$  が常に  $D(w)$  の零点である事、特に、 $\gamma = 1$  の場合には唯一の零点である事、そして、 $\gamma \neq 1$  の場合には2つ目の零点  $(\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  が存在する事が明らかになった。 $\gamma \neq 1$  の場合における  $D(w)$  の2つ目の零点  $(\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  は、任意の  $\gamma, \eta > 0$  に対して ( $\gamma \neq 1$ ) 正值を取り、以下においては適宜に  $w_0$  と表記される (図1 (左図) 参照)：

$$w_0 := (\gamma\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} > 0. \quad (13)$$

さて、 $\gamma \neq 1$  の場合における  $D(w)$  の2つ目の零点  $w_0$  については、以下のように、その値について上限または下限を求めることができる。第一に、 $\gamma < 1$  の場合、 $1/(1-\gamma) > 1$  により、 $\gamma\eta < 1 \iff \eta < 1/\gamma > 1$  ならば、 $w_0 < \gamma\eta < 1$  であり、 $\gamma\eta = 1 \iff \eta = 1/\gamma > 1$  ならば、 $w_0 = \gamma\eta = 1$  であり、 $\gamma\eta > 1 \iff \eta > 1/\gamma > 1$  ならば、 $w_0 > \gamma\eta > 1$  である。第二に、 $\gamma > 1$  の場合、 $1/(1-\gamma) < 0$  により、 $\gamma\eta < 1 \iff \eta < 1/\gamma < 1$  ならば、 $w_0 > 1 > \gamma\eta$  であり、 $\gamma\eta = 1 \iff \eta = 1/\gamma < 1$  ならば、 $w_0 = 1 = \gamma\eta$  であり、 $\gamma\eta > 1 \iff \eta > 1/\gamma < 1$  ならば、 $w_0 < 1 < \gamma\eta$  である。以上によって、 $\gamma \neq 1$  の場合、 $w_0$  について次の関係式を得る (図1 (左図) 参照)：

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 && \text{if } 1 - \gamma\eta = 0, \\ w_0 &< \min\{1, \gamma\eta\} && \text{if } (1 - \gamma)(1 - \gamma\eta) > 0, \\ \max\{1, \gamma\eta\} &< w_0 && \text{if } (1 - \gamma)(1 - \gamma\eta) < 0. \end{aligned}$$

また、 $w = -\log z \iff z = e^{-w}$  なる関係に注意して、適宜に次の表記を採用する ( $0 < w < \infty$ ,  $0 < z < 1$ , 図2 (左図) 参照)：

$$z_0 := e^{-w_0} = \exp \left[ -(\gamma\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]. \quad (14)$$

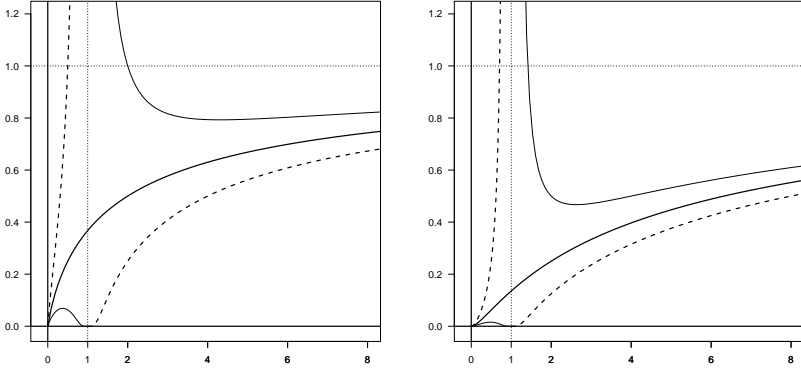


図 1:  $w = w_0$  ((13) 式, 左図) と  $w = w_*$  ((22) 式, 右図) のグラフ (縦軸  $w$ , 横軸  $\gamma$ ):  $\eta = 1$  (実線),  $\eta = 2 > 1$  (破線),  $\eta = 1/2 < 1$  (細実線)

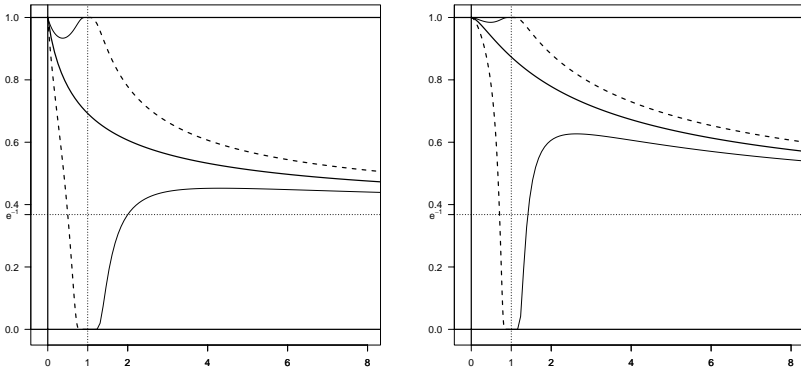


図 2:  $z = z_0$  ((14) 式, 左図) と  $z = z_*$  ((24) 式, 右図) のグラフ (縦軸  $z$ , 横軸  $\gamma$ ):  $\eta = 1$  (実線),  $\eta = 2 > 1$  (破線),  $\eta = 1/2 < 1$  (細実線)

$z_0$  については次の関係式が成立する ( $\gamma \neq 1$ , 図 2 (左図) 参照):

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{-1} = 0.367879 \dots & \text{if } 1 - \gamma\eta &= 0, \\ \max\{e^{-1}, e^{-\gamma\eta}\} &< z_0 < 1 & \text{if } (1 - \gamma)(1 - \gamma\eta) > 0, \\ 0 < z_0 < \min\{e^{-1}, e^{-\gamma\eta}\} & & \text{if } (1 - \gamma)(1 - \gamma\eta) < 0. \end{aligned}$$

さて, 以上の議論を通じて,  $\gamma \neq 1$  の場合, (11) 式における  $D(w) = w - \gamma\eta w^\gamma$  の正負の符号を定める条件について, 以下の性質が判明する (図 3 参照). 第一に,  $\gamma > 1$  の場合,  $D(w)$  の正負について次の関係が成立する (以下においては, この関係を関係 (\*) として言及する. 図 3 (左図) 参照):

1.  $w = 0$  ( $\iff z = e^{-w} = 1$ ) の時,  $D(w) = 0$ .
2.  $0 < w < w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  の時,  $0 < D(w) < w_0$ .
3.  $w = w_0$  ( $\iff z = z_0 = e^{-w_0}$ ) の時,  $D(w) = 0$ .
4.  $w_0 < w < \infty$  の時,  $D(w) < 0$ .
5.  $w \rightarrow \infty$  ( $\iff z \rightarrow 0$ ) の時,  $D(w) \rightarrow -\infty$ .

第二に,  $\gamma < 1$  の場合,  $D(w)$  の正負について次の関係が成立する (以下においては, この関係を関係 (\*\*)) として言及する. 図 3 (右図) 参照):

1.  $w = 0$  ( $\iff z = 1$ ) の時,  $D(w) = 0$ .
2.  $0 < w < w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  の時,  $-w_0 < D(w) < 0$ .
3.  $w = w_0$  ( $\iff z = e^{-w_0}$ ) の時,  $D(w) = 0$ .
4.  $w_0 < w < \infty$  の時,  $D(w) > 0$ .
5.  $w \rightarrow \infty$  ( $\iff z \rightarrow 0$ ) の時,  $D(w) \rightarrow \infty$ .

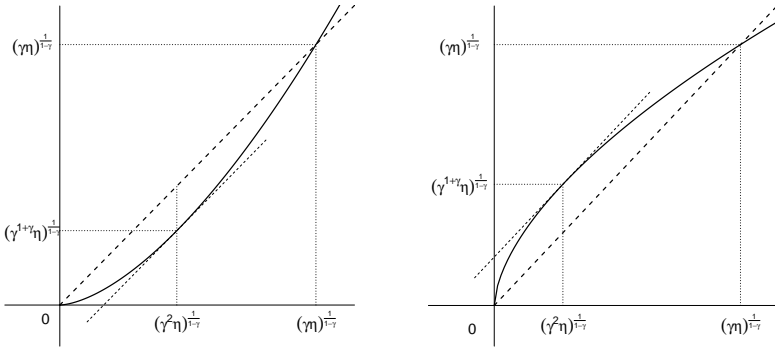


図 3:  $D(w) = w - \gamma\eta w^\gamma$  のグラフ（左図:  $\gamma > 1$  の場合, 右図:  $\gamma < 1$  の場合): 実線  $\cdots u = \gamma\eta w^\gamma$ , 破線  $\cdots u = w$  (縦軸  $u$ , 横軸  $w$ )

### 3.2 $\gamma = 1$ の場合: 対数ガンマ分布

$\gamma = 1$  の場合, 同値関係 (11) 式は次のように簡単化される:

$$f'(z) \leq 0 \iff (1 - \eta)w \geq 1 - \alpha \tag{15}$$

但し,  $w = -\log z, z \in (0, 1)$ .

以下においては,  $\gamma = 1$  なる条件の下,  $\eta = 1$  の場合と  $\eta < 1$  の場合,  $\eta > 1$  の場合の 3 つの場合に細分して議論する.

まず,  $\eta = 1$  の場合, 同値関係 (15) 式は更に簡単化される:

$$f'_0(z) \leq 0 \iff \alpha \geq 1.$$

よって, (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f_0(z|\alpha, \gamma)$  の増減表は表 6 (中段表) に与えられる通りとなる. これによって, 密度関数  $f$  の形状は,  $\gamma = 1$  かつ  $\eta = 1$  の場合,  $\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$  に応じて, それぞれ単調増加型, 一様分布, 単調減少型となることが分かる.

次に、 $\eta < 1 \iff 1 - \eta > 0$  の場合、同値関係 (15) 式は次のように変形される：

$$f'(z) \leq 0 \iff w \geq \frac{1 - \alpha}{1 - \eta}.$$

ここで、 $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$  に応じて、それぞれ  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) > 0$ ,  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) = 0$ ,  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) < 0$  であることに注意すれば、(7) 式で定義される密度関数  $f$  の増減表は、 $\eta < 1$  の場合、表 6 (上段表) として得られることが分かる。これによって、密度関数  $f$  の形状は、 $\gamma = 1$  かつ  $\eta < 1$  の場合、 $\alpha < 1$ ,  $\alpha \geq 1$  に応じて、それぞれ U 字型、単調減少型となることが分かる。

最後に、 $\eta > 1 \iff 1 - \eta < 0$  の場合、同値関係 (15) 式は次のように変形される：

$$f'(z) \leq 0 \iff w \leq \frac{1 - \alpha}{1 - \eta}.$$

ここで、 $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$  に応じて、それぞれ  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) < 0$ ,  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) = 0$ ,  $(1 - \alpha)/(1 - \eta) > 0$  であることに注意すれば、(7) 式で定義される密度関数  $f$  の増減表は、 $\eta > 1$  の場合、表 6 (下段表) として得られることが分かる。これによって、密度関数  $f$  の形状は、 $\gamma = 1$  かつ  $\eta > 1$  の場合、 $\alpha \leq 1$ ,  $\alpha > 1$  に応じて、それぞれ単調増加型、単峰型となることが分かる。

以上の議論によって、(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  について、 $\gamma = 1$  の場合、その形状と母数の関係について次の結果 (補題 1) が得られる<sup>1</sup>。なお、対数一般化ガンマ分布の密度関数 (7) 式は、 $\gamma = 1$  の場合、対数ガンマ分布の密度関数 (8) 式に帰着することに注意する。また、表 1 は補題 1 の知見を表形式で整理する。

---

<sup>1</sup>補題 1 で言及される論点に限れば、Grassia (1977) は次のように知見を整理する：即ち、(8) 式で定義される対数ガンマ分布の密度関数の形状は、 $\alpha < 1$  の場合、 $\eta < 1$  ならば U 字型、 $\eta \geq 1$  ならば J 字型となり、 $\alpha = 1$  の場合、 $\eta < 1$  ならば逆 J 字型、 $\eta = 1$  ならば一様分布、 $\eta > 1$  ならば原点に始まり  $z = 1$  で有限値を取る形状となり、 $\alpha > 1$  の場合、 $\eta \leq 1$  ならば逆 J 字型、 $\eta > 1$  ならば原点に始まり最大点まで増加した後に減少する形状となる。

**補題 1** (対数一般化ガンマ分布の形状:  $\gamma = 1$  の場合 (対数ガンマ分布)). (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は,  $\gamma = 1$  の場合, 対数ガンマ分布の密度関数 (8) 式に帰着し, そのグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) | z \in (0, 1)\}$  の形状は, 正値の母数  $\alpha, \eta$  に応じて以下のように定まる (表 1 参照). 但し, 以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と略記する.

1.  $0 < \eta < 1$  の場合:

(a)  $0 < \alpha < 1$  の場合:  $U$ 字型

密度関数  $f(z)$  のグラフは,  $z = m$  を最小点 (反最頻値) とする  $U$ 字型の形状を示す:

$$m := \exp\left(-\frac{1-\alpha}{1-\eta}\right).$$

(b)  $1 \leq \alpha < \infty$  の場合: 単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり, そのグラフは単調な右下りの形状を示す.

2.  $\eta = 1$  の場合:

(a)  $0 < \alpha < 1$  の場合: 単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり, そのグラフは単調な右上りの形状を示す.

(b)  $\alpha = 1$  の場合: 一様分布

密度関数  $f(z)$  は任意の  $z \in (0, 1)$  に対して定数  $1$  を取り, そのグラフは水平型の形状を示す.

(c)  $1 < \alpha < \infty$  の場合: 単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり, そのグラフは単調な右下りの形状を示す.

3.  $1 < \eta < \infty$  の場合:

(a)  $0 < \alpha \leq 1$  の場合: 単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり, そのグラフは単調な右上りの形状を示す.

(b)  $1 < \alpha < \infty$  の場合：単峰型

密度関数  $f(z)$  のグラフは， $z = m$  を最大点（最頻値）とする単峰型の形状を示す：

$$m := \exp\left(-\frac{1-\alpha}{1-\eta}\right).$$

表 1: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状の分類 ( $\gamma = 1$  の場合，補題 1 参照)

	$\alpha < 1$	$\alpha = 1$	$\alpha > 1$
$\eta < 1$	U 字型	単調減少型	単調減少型
$\eta = 1$	単調増加型	一様分布	単調減少型
$\eta > 1$	単調増加型	単調増加型	単峰型

### 3.3 $\gamma > 1$ の場合

$\gamma > 1 \iff 1 - \gamma < 0$  の場合，同値関係 (11) 式に現れる関数  $D(w)$  について，第 3.1 節で提示した関係 (\*) が成立することに注意する（図 3 (左図) 参照）． $\gamma > 1$  の場合については， $1 - \gamma\alpha < 0$  の場合と  $1 - \gamma\alpha = 0$  の場合， $1 - \gamma\alpha > 0$  の場合の 3 つの場合に細分して議論する．

#### 3.3.1 $1 - \gamma\alpha < 0$ の場合

本節では，

$$1 - \gamma\alpha < 0 \iff \gamma\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{\gamma}$$

の場合について議論する．但し， $\gamma > 1 \iff 1/\gamma < 1$  に注意する．

さて，第 3.1 節に提示した関係 (\*) に注意すると，(13) 式で定義される関数  $D(w)$  の零点  $w_0 > 0$  に対して適当な  $w_1 > w_0$  が存在して， $w_1 - \gamma\eta w_1^\gamma = 1 - \gamma\alpha$  とできる．ここで， $z_1 := e^{-w_1}$  と表記して，再び関係 (\*) に注意す



れば, 同値関係 (11) 式により, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (上段左表) で与えられることが分かる. 但し,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. よって,  $1 < \gamma < \infty$  かつ  $1/\gamma < \alpha < \infty$  の場合, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma)$  の形状は,

$$z = z_1 = e^{-w_1}$$

を最大点 (最頻値) とする単峰型である. 但し,  $w_1$  は関係式  $w_1 - \gamma w_1^\gamma = 1 - \alpha\gamma$  を満たし,  $w_1 > w_0$  である. これによって, 最頻値  $z_1$  は, (14) 式で定義される  $z_0$  より小さな値であることが分かる:

$$z_1 = e^{-w_1} < e^{-w_0} = z_0.$$

### 3.3.2 $1 - \gamma\alpha = 0$ の場合

本節では,

$$1 - \gamma\alpha = 0 \iff \gamma\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{\gamma}$$

の場合について議論する. 但し,  $\gamma > 1 \iff 1/\gamma < 1$  に注意する.

さて, 第 3.1 節に提示した関係 (\*) に注意すると,  $w = 0$  または  $w = w_0$  において  $D(w) = 0$  であるから, 同値関係 (11) 式により, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (上段右表) で与えられることが分かる. 但し,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. よって,  $\gamma > 1$  かつ  $\alpha = 1/\gamma$  の場合, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は,

$$z = z_0 = e^{-w_0} = \exp \left[ -(\gamma\eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]$$

を最大点 (最頻値) とする単峰型である ((14) 式, 図 2 (左図) 参照).

### 3.3.3 $1 - \gamma\alpha > 0$ の場合

本節では,

$$1 - \gamma\alpha > 0 \iff \gamma\alpha < 1 \iff \alpha < \frac{1}{\gamma}$$

の場合について議論する。但し、 $\gamma > 1 \iff 1/\gamma < 1$  に注意する。

さて、同値関係 (11) 式を評価するに際して、関数  $D(w) = w - \gamma\eta w^\gamma$ ,  $w \geq 0$  については、任意の  $\gamma > 1$  と  $\eta > 0$  に対して、 $w$  の関数として連続なので、有限閉区間  $[0, w_0]$  において最大点  $w_*$  が存在することに注意する ( $w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$ ):

$$w_* := \arg \max_{w \in [0, w_0]} D(w) \quad (16)$$

また、第 3.1 節に提示した関係 (\*) により、 $w \in (0, w_0)$  において  $0 < D(w) < w_0$  であり、かつ、 $w = 0$  または  $w = w_0$  において  $D(w) = 0$  であることに注意すると、最大点  $w_*$  は (16) 式右辺の最大化問題の内点解、即ち、 $w_* \in (0, w_0)$  にして

$$0 < D(w_*) = \max_{w \in [0, w_0]} D(w) < w_0$$

なることが分かる。また、最大点  $w_*$  は一意に定まることに注意する。 $w_*$  の一意性やその値については補題 2 の証明を参照されたい。

以上の議論に基づいて、 $1 - \gamma\alpha > 0$  の前提と  $\alpha, \gamma$  の正值性により  $0 < 1 - \gamma\alpha < 1$  であることに注意すると、(11) 式を評価するに際しては、 $D(w_*) \leq 1$  で場合分けして議論すれば良いと分かる。そして、 $\gamma > 1$  に応じて適当な  $\eta_* \in (0, 1)$  が存在して、次の同値関係が成立することは補題 2 の証明において明らかにされる：

$$D(w_*) \leq 1 \iff \eta \geq \eta_*. \quad (17)$$

従って、 $\gamma > 1$  かつ  $1 - \gamma\alpha > 0 \iff \alpha < 1/\gamma$  の場合については、同値関係 (17) 式に基づいて、 $\eta \leq \eta_*$  の場合と  $\eta > \eta_*$  の場合の 2 つの場合に細分して議論する。

第一に、 $\eta \leq \eta_* \iff D(w_*) \geq 1$  の場合、 $0 < 1 - \gamma\alpha < 1$  であることに注意すると、

$$D(w_*) = \max_{w \in (0, w_0)} D(w) > 1 - \gamma\alpha$$

であり、かつ、 $w_*$  が一意に定まること、そして、 $w = 0$  または  $w = w_0$  において  $D(w) = 0$  であることに注意すると、 $D(w)$  が  $w$  の関数として連続

であることにより,  $0 < w_1 < w_* < w_2 < w_0 < 1$  を満たす  $w_1$  と  $w_2$  が存在して,

$$w_1 - \gamma w_1^\gamma = w_2 - \gamma w_2^\gamma = 1 - \gamma\alpha$$

とすることができる. ここで,

$$z_2 := e^{-w_2} < z_* := e^{-w_*} < z_1 := e^{-w_1} \tag{18}$$

と表記すると, 第 3.1 節に提示した関係 (\*) と (11) 式により, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (中段表) で与えられる. ここで,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. なお,  $z_1$  と  $z_2$  はそれぞれ  $w_1$  と  $w_2$  の一意性の結果として一意に定まり,  $w_1$  と  $w_2$  の一意性については補題 2 の証明を参照されたい. 表 7 (中段表) により, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は, 増加・減少・増加という 3 次関数的な右上りの形状, 言い換えれば, 単調ではないものの右上りの傾向を示すことが分かる. 本稿では, これを非単調増加型と呼ぶことにする.

第二に,  $\eta > \eta_* \iff D(w_*) < 1$  の場合, 任意の  $\gamma > 1$  に対して,  $1 - \gamma\alpha$  が  $\alpha$  の関数として連続にして単調減少であり, かつ,  $0 < \alpha < 1/\gamma < 1$  に対して,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} 1 - \gamma\alpha = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1/\gamma} 1 - \gamma\alpha = 0$$

であることに注意すると, 適当な  $\alpha_* \in (0, 1/\gamma)$  が一意に存在して

$$1 - \gamma\alpha_* = D(w_*) = \max_{w \in (0, w_0)} D(w) \tag{19}$$

とできる. これにより, 任意の  $\gamma > 1$  に対して次の同値関係を得る:

$$D(w_*) \leq 1 - \gamma\alpha \iff \alpha \leq \alpha_*. \tag{20}$$

但し,  $0 < \alpha < 1/\gamma$  であることに注意する.

上述の議論に基づいて, 第二の場合 ( $\eta > \eta_* \iff D(w_*) < 1$  の場合) においては,  $\gamma > 1$  かつ  $\alpha < 1/\gamma$  なる条件の下,  $0 < \alpha < \alpha_*$  の場合と  $\alpha = \alpha_*$  の場合,  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合の 3 つの場合に更に細分して議論する.

まず,  $0 < \alpha < \alpha_*$  の場合, (20) 式により

$$1 - \gamma\alpha > \max_{w \in (0, w_0)} D(w)$$

であり, かつ, 第 3.1 節に提示した関係 (\*) と (11) 式に注意すると, 任意の  $w > 0$  に対して次の同値関係を得る:

$$1 - \gamma\alpha > D(w) \iff f'(z) > 0, \forall z \in (0, 1).$$

よって, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (下段右表) で与えられる. ここで,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. 従って, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は単調な右上り (単調増加型) である.

次に,  $\alpha = \alpha_*$  の場合, (20) 式により

$$1 - \gamma\alpha = \max_{w \in (0, w_0)} D(w) = D(w_*)$$

にして,

$$1 - \gamma\alpha > D(w), \quad \forall w \neq w_*$$

であることから, (11) 式に注意すると, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (下段左表) で与えられる. ここで,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にある. また, 先述の通り,  $z_* := e^{-w_*}$  と表記する. これにより, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は単調な右上り (単調増加型) となることが判明する.

最後に,  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合, (20) 式により

$$1 - \gamma\alpha < \max_{w \in [0, w_0]} D(w) = D(w_*)$$

であり, かつ,  $w_*$  が一意に定まること, そして,  $w = 0$  または  $w = w_0$  において  $D(w) = 0$  であることに注意すると,  $D(w)$  が  $w$  の関数として連続であることにより,  $0 < w_1 < w_* < w_2 < w_0$  を満たす  $w_1$  と  $w_2$  が存在して,

$$D(w_1) = D(w_2) = 1 - \gamma\alpha$$

とすることができる。ここで、(18) 式と同様に

$$z_2 := e^{-w_2} < z_* := e^{-w_*} < z_1 := e^{-w_1} \quad (21)$$

と表記すると、第 3.1 節に提示した関係(\*) と (11) 式により、(7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (中段表) で与えられる。ここで、 $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する。なお、 $z_1$  と  $z_2$  はそれぞれ  $w_1$  と  $w_2$  の一意性の結果として一意に定まり、 $w_1$  と  $w_2$  の一意性については補題 2 の証明を参照されたい。表 7 (中段表) により、密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は、単調ではないものの右上りの傾向 (非単調増加型) を示すことが分かる。

### 3.3.4 分布の形状

以上の議論によって、 $\gamma > 1$  の場合、(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  の形状について次の結果 (補題 2) を得る。なお、表 2 は補題 2 の知見を表形式で整理する。

**補題 2** (対数一般化ガンマ分布の形状 :  $\gamma > 1$  の場合).  $\gamma > 1$  の場合、(7) 式で定義される密度関数  $f$  のグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) \mid z \in (0, 1)\}$  の形状は、正値の母数  $\alpha$  と  $\eta$  に応じて以下のように定まる (表 2 参照)。但し、 $\gamma > 1$  に対して、

$$\eta_* := \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma+1}}, \quad 0 < \eta_* < 1$$

であり (図 4 参照),  $\gamma > 1$  と  $\eta > \eta_*$  に対して、

$$\alpha_* = \frac{1}{\gamma} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad 0 < \alpha_* < \frac{1}{\gamma}$$

である<sup>2</sup> (図 5, 図 6, 図 7 参照)。また、以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と

<sup>2</sup> $\alpha_*$  は、その定義式 (19) から分かる通り、 $\gamma > 1$  の場合に  $\alpha_* < 1/\gamma$  となり ( $D(w_*) > 0$  に注意)、更に  $\eta > \eta_* \iff D(w_*) \leq 1$  に対しては  $\alpha_* > 0$  となる。この点、 $\alpha_*$  自体は  $\eta \leq \eta_* \iff D(w_*) \geq 1$  に対しても定義され得るが、その値は非正値となる： $\eta = \eta_* \iff D(w_*) = 1$  の時に  $\alpha_* = 0$ ,  $\eta < \eta_* \iff D(w_*) > 1$  の時に  $\alpha_* < 0$ 。この点、例えば、 $\eta = \eta_*$  の時には  $\alpha_* = 1/\gamma - (1 - 1/\gamma)(\gamma - 1)^{-1} = 1/\gamma - 1/\gamma = 0$  としても確かめられる。

略記する.

1.  $1/\gamma \leq \alpha < \infty$  の場合：単峰型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、 $z = z_1$  を最大点（最頻値）とする単峰型の形状を示す：

$$z_1 = e^{-w_1}.$$

但し、 $w_1$  は関係式  $D(w_1) = 1 - \alpha\gamma \leq 0$  を満たし、 $w_1 \geq w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  である。よって、 $z_1 = e^{-w_1} \leq z_0 = e^{-w_0}$  である。また、 $w_1$  は  $\alpha$  の単調増加関数として定まり、その結果として、最頻値  $z_1$  は  $\alpha$  の単調減少関数として定まる。特に、 $\alpha = 1/\gamma$  の時に最頻値  $z_1 = z_0$  となり、 $\alpha \rightarrow \infty$  の時に  $z_1 \rightarrow 0$  となる。

2.  $0 < \alpha < 1/\gamma$  の場合：

(a)  $\eta \leq \eta_*$  の場合：非単調増加型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、(18) 式で定義される  $z_2$  を極大点、 $z_1$  を極小点として増加・減少・増加という形状（非単調な右上りの形状、 $z_2 < z_1$ 、表 7 中段表参照）を示す。

(b)  $\eta > \eta_*$  の場合：

i.  $0 < \alpha \leq \alpha_*$  の場合：単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり、そのグラフは単調な右上りの形状を示す。

ii.  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合：非単調増加型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、(21) 式で定義される  $z_2$  を極大点、 $z_1$  を極小点として増加・減少・増加という形状（非単調な右上りの形状、 $z_2 < z_1$ 、表 7 中段表参照）を示す。

証明.  $\gamma > 1$  の時、(7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は、 $1/\gamma < \alpha < \infty$  の場合においては単峰型となり、 $0 < \alpha < 1/\gamma$  の場合においては、同値関係 (17) 式の下、適当な  $\alpha_* \in (0, 1/\gamma)$  が存在して、 $\eta \leq \eta_*$  ならば非単調増加型、 $\eta > \eta_*$  ならば  $\alpha \leq \alpha_*$  と  $\alpha_* < \alpha$  に応じてそれぞれ単調増加型と非単調増加型となる。このことについては、本節における議論によつ

て既に明らかにされた。よって、以下では、同値関係 (17) 式が成立する事を証明した後、 $\gamma$  に応じて定まる  $\alpha_*$  の値を求めることにする。

第一に、同値関係 (17) 式の成立を証明し、それと共に、 $\gamma$  に応じて定まる  $\eta_*$  の値を求める。その為、 $D(w_*) = \max_{w \in (0, w_0)} D(w)$  であることに注意して、関数  $D(w)$  の最大点  $w_*$  を導出した上で、その最大値  $D(w_*)$  を評価する。そして、その結果に基づいて、同値関係 (17) 式と共に  $\eta_*$  の値を導出する。

まず、関数  $D(w)$  の最大点  $w_*$  とは (16) 式の最大化問題における解である。よって、 $w_*$  が内点解であること  $w_* \in (0, w_0)$ ,  $w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$  と最大化の 1 階条件により、 $w_*$  は次のように一意に定まる (図 1 (右図), 図 3 (左図) 参照):

$$1 - \gamma^2 \eta w_*^{\gamma-1} = 0 \iff w_* = (\gamma^2 \eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} = \gamma^{\frac{1}{1-\gamma}} w_0. \quad (22)$$

ここで、 $0 < \gamma^{1/1-\gamma} < 1$  に注意すると、 $w_* = \gamma^{1/1-\gamma} w_0 < w_0$  により、確かに  $w_* \in (0, w_0)$  である。また、最大化の 2 階条件は、 $\gamma > 1$  と  $\eta > 0$  により、(16) 式の最大化問題において確かに満たされていることに注意する:

$$-\gamma^2(\gamma - 1)\eta w^{\gamma-2} < 0, \quad \forall w \in (0, w_0).$$

なお、 $D'(w) = 1 - \gamma^2 \eta w^{\gamma-1} \leq 0 \iff w \geq (\gamma^2 \eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} = w_*$  により、関数  $D(w)$  は  $w < w_*$  で単調増加、 $w > w_*$  で単調減少である。これによって、(18) 式と (21) 式に現れる  $w_1$  と  $w_2$  が一意に定まることが分かる。

次に、最大値  $D(w_*)$  を評価する。 $D(w_*) = w_* - \gamma \eta w_*^\gamma = (1 - \gamma \eta w_*^{\gamma-1}) w_*$  により、 $w_*^{\gamma-1} = (\gamma^2 \eta)^{-1}$  に注意すると、次の表現を得る:

$$D(w_*) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) w_* = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma^{\frac{2}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (23)$$

なお、 $0 < 1/\gamma < 1$  に注意すれば、 $D(w_*) < w_*$  なることが分かる。

これにより、 $\gamma > 1$  に注意すれば、次の同値関係を得る:

$$D(w_*) \leq 1 \iff \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \frac{\gamma^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}{\gamma-1} \iff \eta \geq \frac{(\gamma-1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma+1}}.$$

よって、同値関係 (17) 式の成立が証明され、それと共に、 $\eta_*$  の値が定まった：

$$\eta_* = \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma+1}}.$$

第二に、 $\alpha_*$  の値は (19) 式に基づいて定まる ( $\eta > \eta_*$ )。よって、 $\alpha_*$  は、関数  $D(w)$  の最大値  $D(w_*)$  に応じて、次の通りに定まる：

$$1 - \gamma\alpha_* = D(w_*) \iff \alpha_* = \frac{1}{\gamma} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

最後に、 $z_* := e^{-w_*}$  は次のように表される (図 2 (右図) 参照)：

$$z_* = \exp \left[ -(\gamma^2 \eta)^{\frac{1}{1-\gamma}} \right]. \tag{24}$$

□

表 2: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状の分類 ( $\gamma > 1$  の場合, 補題 2 参照)

	$\alpha$						
	0	...	$\alpha_*$	...	$1/\gamma$	...	$\infty$
$0 < \eta \leq \eta_*$		非単調増加型			単峰型		
$\eta_* < \eta < \infty$		単調増加型	非単調増加型	単峰型			

\*  $\gamma > 1$  の場合,  $\alpha_*$  は  $\eta > \eta_*$  に対して定義される。



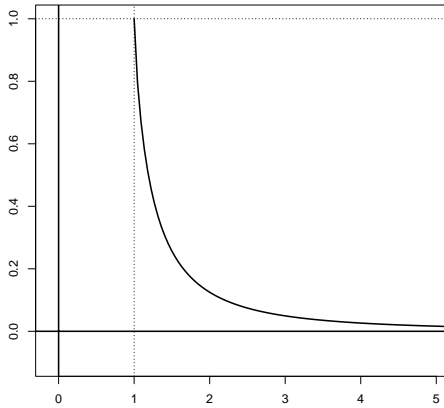


図 4:  $\eta = \eta_*$  のグラフ ((28) 式参照, 縦軸  $\eta$ , 横軸  $\gamma > 1$ )

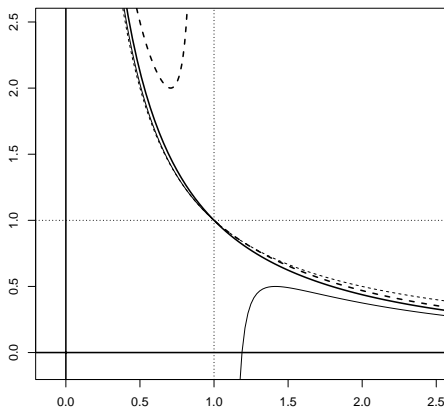


図 5:  $\alpha = \alpha_*$  のグラフ ((29) 式参照, 縦軸  $\alpha$ , 横軸  $\gamma$ ): 実線  $\dots \eta = 1$ , 破線  $\dots \eta = 2 > 1$ , 細実線  $\dots \eta = 1/2 < 1$  の場合, 細破線  $\dots \alpha = 1/\gamma$  のグラフ

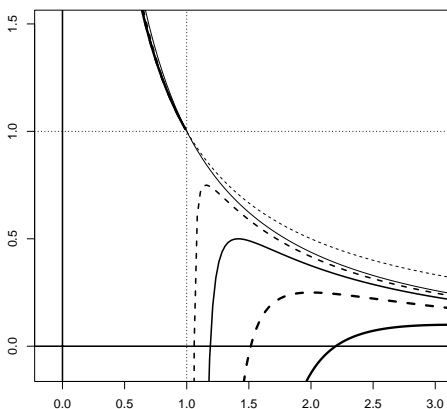


図 6:  $\alpha = \alpha_*$  のグラフ ((29) 式参照,  $\eta \leq 1$  の場合, 縦軸  $\alpha$ , 横軸  $\gamma$ ): 太実線  $\cdots \eta = 1/10$ , 太破線  $\cdots \eta = 1/4$ , 実線  $\cdots \eta = 1/2$ , 破線  $\cdots \eta = 3/4$ , 細実線  $\cdots \eta = 1$  の場合, 細破線  $\cdots \alpha = 1/\gamma$  のグラフ

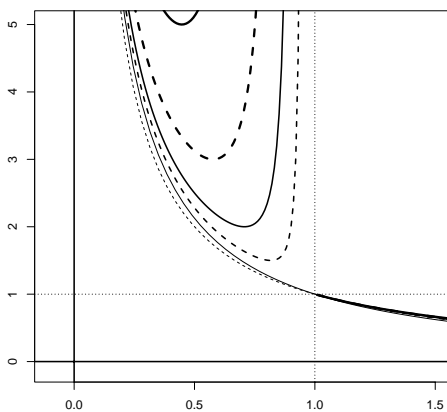


図 7:  $\alpha = \alpha_*$  のグラフ ((29) 式参照,  $\eta \geq 1$  の場合, 縦軸  $\alpha$ , 横軸  $\gamma$ ): 太実線  $\cdots \eta = 5$ , 太破線  $\cdots \eta = 3$ , 実線  $\cdots \eta = 2$ , 破線  $\cdots \eta = 3/2$ , 細実線  $\cdots \eta = 1$  の場合, 細破線  $\cdots \alpha = 1/\gamma$  のグラフ

### 3.4 $\gamma < 1$ の場合

$\gamma < 1 \iff 1 - \gamma > 0$  の場合, 同値関係 (11) 式に現れる関数  $D(w)$  について, 第 3.1 節で提示した関係 (\*\*) が成立することに注意する. 以下では, 第 3.3 節と同様にして,  $1 - \gamma\alpha < 0$  の場合と  $1 - \gamma\alpha = 0$  の場合,  $1 - \gamma\alpha > 0$  の場合の 3 つの場合に細分して議論する.

まず,  $1 - \gamma\alpha = 0 \iff \alpha = 1/\gamma$  の場合については, 第 3.3 節と全く同様の議論によって, (7) 式で定義される密度関数  $f$  の増減表として表 8 (上段右表) が得られる. 次に,  $1 - \gamma\alpha > 0 \iff \alpha < 1/\gamma$  の場合については,  $(1 - \gamma)(1 - \gamma\alpha) > 0$  の場合として, 第 3.3 節の  $1 - \gamma\alpha < 0$  の場合と同様の議論を適用することで, 密度関数  $f$  の増減表として表 8 (上段左表) が得られる. 最後に,  $1 - \gamma\alpha < 0 \iff \alpha > 1/\gamma$  の場合については, 第 3.3 節の議論 ( $1 - \gamma\alpha > 0$  の場合) に対して幾許かの修正を加える必要が生じるので, 以下において議論する.

以下,  $1 - \gamma\alpha < 0 \iff \alpha > 1/\gamma$  の場合について議論する. 但し,  $\gamma < 1 \iff 1/\gamma > 1$  に注意する. さて, 同値関係 (11) 式を評価するに際して, 関数  $D(w) = w - \gamma\eta w^\gamma$ ,  $w \geq 0$  については, 任意の  $0 < \gamma < 1$  と  $\eta > 0$  に対して,  $w$  の関数として連続なので, 有限閉区間  $[0, w_0]$  において最小点  $w_*$  が存在することに注意する ( $w_0 = (\gamma\eta)^{1/(1-\gamma)}$ ):

$$w_* := \arg \min_{w \in [0, w_0]} D(w) \quad (25)$$

また, 第 3.1 節に提示した関係 (\*\*) により,  $w \in (0, w_0)$  において  $-w_0 < D(w) < 0$  であり, かつ,  $w = 0$  または  $w = w_0$  において  $D(w) = 0$  であることに注意すると, 最小点  $w_*$  は (25) 式右辺の最小化問題の内点解, 即ち,  $w_* \in (0, w_0)$  にして

$$-w_0 < D(w_*) = \min_{w \in [0, w_0]} D(w) < 0$$

なることが分かる. ここで, 任意の  $0 < \gamma < 1$  に対して,  $1 - \gamma\alpha$  が  $\alpha$  の関数として連続にして単調減少であり, かつ,  $1 < 1/\gamma < \alpha$  に対して,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1/\gamma} 1 - \gamma\alpha = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 1 - \gamma\alpha = -\infty$$

であることに注意すると、適当な  $\alpha_* \in (1/\gamma, \infty)$  が一意に存在して

$$1 - \gamma\alpha_* = D(w_*) = \min_{w \in (0, w_0)} D(w) \quad (26)$$

とできる。これにより、任意の  $\gamma > 1$  に対して次の同値関係を得る：

$$D(w_*) \leq 1 - \gamma\alpha \iff \alpha \leq \alpha_* \quad (27)$$

但し、 $\alpha > 1/\gamma$  であることに注意する。

上述の議論に基づいて、 $\gamma < 1$  かつ  $\alpha > 1/\gamma$  なる場合においては、 $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合と  $\alpha = \alpha_*$  の場合、 $\alpha_* < \alpha < \infty$  の場合の3つの場合に細分した上で、第3.3節と同様の議論を繰り返せば、(7)式で定義される密度関数  $f$  の増減表として、表8の中段表と下段表が得られる。

以上によって、 $\gamma < 1$  の場合、(7)式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  の形状について次の結果(補題3)を得る。なお、表3は補題3の知見を表形式で整理する。

**補題 3** (対数一般化ガンマ分布の形状： $\gamma < 1$  の場合).  $0 < \gamma < 1$  の場合、(7)式で定義される密度関数  $f$  のグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) \mid z \in (0, 1)\}$  の形状は、正值の母数  $\alpha$  と  $\eta$  に応じて以下のように定まる(表3参照)。但し、 $0 < \gamma < 1$  と  $\eta > 0$  に対して、

$$\alpha_* = \frac{1}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}}, \quad \alpha_* > \frac{1}{\gamma}$$

である(図5, 図6, 図7参照)。また、以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と略記する。

1.  $0 < \alpha \leq 1/\gamma$  の場合：U字型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、 $z = z_1$  を最小点(反最頻値)とするU字型の形状を示す：

$$z_1 = e^{-w_1}.$$

但し、 $w_1$  は関係式  $D(w_1) = 1 - \gamma\alpha \geq 0$  を満たし、 $w_1 \geq w_0$  である。よって、 $z_1 = e^{-w_1} \leq z_0 = e^{-w_0}$  である。また、 $w_1$  は  $\alpha$  の単調減少

関数として定まり、その結果として、最小点  $z_1$  は  $\alpha$  の単調増加関数として定まる。特に、 $\alpha = 1/\gamma$  の時に最小点  $z_1 = z_0$  となる。

2.  $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合：非単調減少型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、 $z_2$  を極小点、 $z_1$  を極大点として減少・増加・減少という形状（非単調な右下りの形状、 $z_2 < z_1$ 、表 8 中段表参照）を示す。

3.  $\alpha_* \leq \alpha < \infty$  の場合：単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり、そのグラフは単調な右下りの形状を示す。

**証明.** 本補題の証明については、補題 2 の証明と同様の議論を繰返せばよい。但し、 $\gamma < 1$  の場合に  $\alpha_*$  が  $1/\gamma$  より大きくなることについては、 $0 < \gamma < 1$  かつ  $\eta > 0$  に注意すると、 $1/\gamma - 1 > 0$  かつ  $\gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} > 0$ 、 $\eta^{1/(1-\gamma)} > 0$  であるから、確かに  $\alpha_* > 1/\gamma$  を得る。□

表 3: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状の分類 ( $\gamma < 1$  の場合、補題 3 参照)

	$0 < \alpha \leq 1/\gamma$	$1/\gamma < \alpha < \alpha_*$	$\alpha_* \leq \alpha < \infty$
$0 < \eta < \infty$	U 字型	非単調減少型	単調減少型

### 3.5 対数一般化ガンマ分布の形状

補題 1 と補題 2、補題 3 の知見を総合することによって、(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  の形状について次の結果 (命題 1) を得る。

**命題 1** (対数一般化ガンマ分布の形状). (7) 式で定義される密度関数  $f$  のグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) \mid z \in (0, 1)\}$  の形状は、正值の母数  $\alpha$  と  $\gamma, \eta$  に応

じて以下のように定まる。但し、 $\gamma > 1$  に対して、

$$\eta_* = \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma+1}}, \quad 0 < \eta_* < 1, \quad (28)$$

であり (図 4 参照),  $\gamma \neq 1$  に対して、

$$\alpha_* = \frac{1}{\gamma} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} = \frac{1}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} \eta^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (29)$$

である (図 5, 図 6, 図 7 参照). なお,  $\gamma < 1$  に対しては  $\alpha_* > 1/\gamma > 1$ ,  $\gamma > 1$  に対しては  $\alpha_* < 1/\gamma < 1$  であり, 更に,  $\gamma > 1$  の場合には  $\eta > \eta_*$  に対して  $\alpha_* > 0$  である. また, 以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と略記する.

1.  $0 < \gamma < 1$  の場合 (詳細については補題 3 参照):  $\alpha_* > 1/\gamma$  を得る.

(a)  $0 < \alpha \leq 1/\gamma$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは,  $U$  字型の形状を示す.

(b)  $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 非単調減少型の形状を示す.

(c)  $\alpha_* \leq \alpha < \infty$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 単調減少型の形状を示す.

2.  $\gamma = 1$  の場合 (対数ガンマ分布, 詳細については補題 1 参照):

(a)  $\eta = \alpha = 1$  の場合 (一様分布):

密度関数  $f$  のグラフは, 水平型の形状を示す.

(b)  $\eta > 1$  かつ  $\alpha > 1$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 単峰型の形状を示す.

(c)  $\eta < 1$  かつ  $\alpha < 1$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは,  $U$  字型の形状を示す.

(d)  $\eta \geq 1$  かつ  $\alpha \leq 1$  の場合 ( $\eta \neq \alpha$ ):

密度関数  $f$  のグラフは, 単調増加型の形状を示す.

(e)  $\eta \leq 1$  かつ  $\alpha \geq 1$  の場合 ( $\eta \neq \alpha$ ):

密度関数  $f$  のグラフは, 単調減少型の形状を示す.

3.  $1 < \gamma < \infty$  の場合 (詳細については補題 2 参照):  $\alpha_* < 1/\gamma$  を得る.

(a)  $0 < \eta \leq \eta_*$  の場合:

i.  $0 < \alpha < 1/\gamma$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 非単調増加型の形状を示す.

ii.  $1/\gamma \leq \alpha < \infty$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 単峰型の形状を示す.

(b)  $\eta_* < \eta < \infty$  の場合:

i.  $0 < \alpha \leq \alpha_*$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 単調増加型の形状を示す.

ii.  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 非単調増加型の形状を示す.

iii.  $1/\gamma \leq \alpha < \infty$  の場合:

密度関数  $f$  のグラフは, 単峰型の形状を示す.

### 3.6 対数一般化ガンマ分布の形状: 幾つかの特殊な場合

(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は, その特殊な場合として,  $\gamma = 1$  の場合には対数ガンマ分布の密度関数 (8) 式に帰着し,  $\alpha = 1$  の場合には対数 Weibull 分布の密度関数 (9) 式, そして,  $\eta = 1$  の場合には標準対数一般化ガンマ分布の密度関数 (10) 式に帰着する. 更には,  $\gamma = \alpha = \eta = 1$  の場合に一様分布の密度関数に帰着する.

以下の各節においては, 対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  の母数と密度の形状について, その特殊な場合を議論する.  $\gamma = 1$  の場合については, 命題 1 を得る過程において既に第 3.2 節で議論され, その結果として補題 1 を得ていた. 従って, 以下の各節では,  $\alpha = 1$  の場合と  $\eta = 1$  の場合について個別に議論する.

### 3.6.1 $\alpha = 1$ の場合：対数 Weibull 分布

(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は、 $\alpha = 1$  の場合には対数 Weibull 分布の密度関数 (9) 式に帰着する。よって、命題 1 の系として次の結果 (系 1) が得られる<sup>3</sup>。なお、表 4 は系 1 の知見を表形式で整理する。

系 1 (対数一般化ガンマ分布の形状： $\alpha = 1$  の場合 (対数 Weibull 分布))。 (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は、 $\alpha = 1$  の場合、対数 Weibull 分布の密度関数 (9) 式に帰着し、そのグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) | z \in (0, 1)\}$  の形状は、正值の母数  $\gamma, \eta$  に応じて以下のように定まる (表 4 参照)。但し、以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と略記する。

1.  $0 < \gamma < 1$  の場合：U字型

密度関数  $f(z)$  のグラフは、 $z = z_1$  を最小点 (反最頻値) とする U字型の形状を示す：

$$z_1 := e^{-w_1}.$$

但し、 $w_1 > w_0$  にして関係式  $D(w_1) = 1 - \gamma > 0$  を満たす。

2.  $\gamma = 1$  の場合：

(a)  $0 < \eta < 1$  の場合：単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり、そのグラフは単調な右下りの形状を示す。

(b)  $\eta = 1$  の場合：一様分布

密度関数  $f(z)$  は任意の  $z \in (0, 1)$  に対して定数 1 を取り、そのグラフは水平型の形状を示す。

(c)  $1 < \eta < \infty$  の場合：単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり、そのグラフは単調な右上りの形状を示す。

---

<sup>3</sup>この点、Mazucheli, Menezes, Fernandes, de Oliveira and Ghitany (2020) は、(9) 式で定義される対数 Weibull 分布 (単位 Weibull 分布) の密度について、その母数  $\eta$  を改めて分位点を表す母数に置き換えた上で、母数と形状の関係を体系的に提示する。



3.  $1 < \gamma < \infty$  の場合: 単峰型

密度関数  $f(z)$  のグラフは,  $z = z_1$  を最大点 (最頻値) とする単峰型の形状を示す:

$$z_1 := e^{-w_1}.$$

但し,  $w_1 > w_0$  にして関係式  $D(w_1) = 1 - \gamma < 0$  を満たす.

証明. 本系の結果は, 命題 1 において  $\alpha = 1$  とすれば得られるが, 以下には, 参考の為, 実質的な議論を提示する.

さて,  $\alpha = 1$  の場合, 同値関係 (11) 式は次のように簡単化される:

$$f'(z) \leq 0 \iff D(w) \geq 1 - \gamma \quad (30)$$

$$\text{但し, } D(w) := w - \gamma \eta w^\gamma, \quad w = -\log z, \quad z \in (0, 1).$$

$\gamma = 1$  の場合については, 第 3.2 節で既に議論された通りである. よって, 以下においては,  $\gamma \neq 1$  の場合について,  $\gamma > 1$  の場合と  $\gamma < 1$  の場合に大別して議論する.

まず,  $\gamma > 1 \iff 1 - \gamma < 0$  の場合, 第 3.1 節で提示した関数  $D(w)$  の正負についての関係 (\*) に注意すると, 適当な  $w_1 > w_0$  が一意に存在して  $D(w_1) = 1 - \gamma$  とできる. ここで,  $z_1 := e^{-w_1}$  と表記すれば, 同値関係 (30) 式により, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 7 (上段左表) で与えられる. 但し,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. これにより,  $\alpha = 1$  かつ  $\gamma > 1$  の場合, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は,

$$z = z_1 = e^{-w_1}$$

を最大点 (最頻値) とする単峰型であることが判明する.

次に,  $\gamma < 1 \iff 1 - \gamma > 0$  の場合, 第 3.1 節で提示した関数  $D(w)$  の正負についての関係 (\*\*\*) に注意すると, 適当な  $w_1 > w_0$  が一意に存在して  $D(w_1) = 1 - \gamma$  とできる. ここで,  $z_1 := e^{-w_1}$  と表記すれば, 同値関係 (30) 式により, (7) 式で定義される密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表は表 8 (上段左表) で与えられる. 但し,  $z$  と  $w$  は互いに単調減少変換の関

係  $z = e^{-w} \iff w = -\log z$  にあることに注意する. これにより,  $\alpha = 1$  かつ  $\gamma < 1$  の場合, 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状は,

$$z = z_1 = e^{-w_1}$$

を最小点 (反最頻値) とする  $U$  字型であることが判明する.

以上の議論によって, (7) 式で定義される密度関数  $f$  について, その母数と形状の関係が  $\alpha = 1$  の場合において明らかにされた.  $\square$

表 4: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状の分類 ( $\alpha = 1$  の場合, 系 1 参照)

	$\eta < 1$	$\eta = 1$	$\eta > 1$
$\gamma < 1$	$U$ 字型		
$\gamma = 1$	単調減少型	一様分布	単調増加型
$\gamma > 1$	単峰型		

### 3.6.2 $\eta = 1$ の場合 : 標準対数一般化ガンマ分布

(7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は,  $\eta = 1$  の場合, その標準型 (10) 式に帰着する. よって, 命題 1 の系として次の結果 (系 2) が得られる (詳細については, 鍵原 2020 参照). なお, 表 5 は系 2 の知見を表形式で整理する.

**系 2** (対数一般化ガンマ分布の形状 :  $\eta = 1$  の場合 (標準型)). (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f$  は,  $\eta = 1$  の場合, その標準型 (10) 式に帰着し, そのグラフ  $\{(z, f(z|\alpha, \gamma, \eta)) | z \in (0, 1)\}$  の形状は, 正值の母数  $\alpha, \gamma$  に応じて以下のように定まる (表 5 参照). 但し,  $\gamma \neq 1$  に対して,

$$\alpha_* = \frac{1}{\gamma} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = \frac{1}{\gamma} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \gamma^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}, \quad \alpha_* > 0 \quad (31)$$

である. また, 以下では  $f(z) := f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  と略記する.

1.  $0 < \gamma < 1$  の場合:  $\alpha_* > 1/\gamma$  を得る.

(a)  $0 < \alpha \leq 1/\gamma$  の場合:  $U$  字型

密度関数  $f(z)$  は最小点 (反最頻値) を持ち, そのグラフは  $U$  字型の形状を示す.

(b)  $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合: 非単調減少型

密度関数  $f(z)$  のグラフは, 減少・増加・減少という形状を示す.

(c)  $\alpha_* \leq \alpha < \infty$  の場合: 単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり, そのグラフは単調な右下りの形状を示す.

2.  $\gamma = 1$  の場合:

(a)  $0 < \alpha < 1$  の場合: 単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり, そのグラフは単調な右上りの形状を示す.

(b)  $\alpha = 1$  の場合: 一様分布

密度関数  $f(z)$  は任意の  $z \in (0, 1)$  に対して定数  $1$  を取り, そのグラフは水平型の形状を示す.

(c)  $\alpha > 1$  の場合: 単調減少型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調減少関数であり, そのグラフは単調な右下りの形状を示す.

3.  $1 < \gamma < \infty$  の場合:  $\alpha_* < 1/\gamma$  を得る.

(a)  $0 < \alpha \leq \alpha_*$  の場合: 単調増加型

密度関数  $f(z)$  は  $z$  の単調増加関数であり, そのグラフは単調な右上りの形状を示す.

(b)  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合: 非単調増加型

密度関数  $f(z)$  グラフは, 増加・減少・増加という形状を示す.

(c)  $1/\gamma \leq \alpha < \infty$  の場合：単峰型

密度関数  $f(z)$  は最大点（最頻値）を持ち，そのグラフは単峰型の形状を示す。

証明. 本系の結果は，命題 1 において  $\eta = 1$  とすれば得られる．なお，実質的な議論については，鍵原（2020）を参照されたい。□

表 5: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の形状の分類 ( $\eta = 1$  の場合，系 2 参照)

	$\alpha$									
	0	...	$\alpha_*$	...	$1/\gamma$	...	$\alpha_*$	...	$\infty$	
$\gamma < 1$	U 字型				非単調減少型	単調減少型				
$\gamma = 1$	単調増加型				一様分布	単調減少型				
$\gamma > 1$	単調増加型		非単調増加型		単峰型					

\*  $\gamma < 1$  の場合は  $\alpha_* > 1/\gamma > 1$  となり， $\gamma > 1$  の場合は  $0 < \alpha_* < 1/\gamma < 1$  となる。

## 4 結論

本稿において構成された密度関数 (7) 式を持つ確率分布（対数一般化ガンマ分布）は，単位区間  $(0, 1)$  上に定義される分布にして，3つの母数を持つ．そして，その3つの母数に応じて，その密度の形状は大きく7類型（一様分布・単峰型・U字型・単調増加型・単調減少型・非単調増加型・非単調減少型）に分類されることが判明した（命題 1 参照）。

対数一般化ガンマ分布と同じく単位区間  $(0, 1)$  上に定義されるベータ分布は，2つの母数を持ち，その2つの母数に応じて密度の形状を柔軟に変化させることで知られている．より具体的には，ベータ分布の密度の形状は，その2つの母数に応じて，大きく5類型（一様分布・単峰型・U字型・単調増加型・単調減少型）に分類される（例えば，Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.219 や鍵原 2018 参照）．ところで，3つの母数を持つ対数一般化ガンマ分布は，その特殊な場合として，その標準型の分布や対数ガンマ分布，

対数 Weibull 分布を包含しており、そして、これらの 3 つの分布は、ベータ分布と同様に、いずれも 2 つの母数を持つ。この点、対数ガンマ分布と対数 Weibull 分布の密度の形状は、ベータ分布と同様に 5 類型（一様分布・単峰型・U 字型・単調増加型・単調減少型）に分類される一方で、標準対数一般化ガンマ分布については、密度の形状として、3 つの母数を持つ対数一般化分布と同じく 7 類型を保持することが明らかになった（補題 1, 系 1, 系 2 参照）。

以上により、対数一般化ガンマ分布は、ベータ分布では表現され得ない非単調増加型と非単調減少型という形状を示し得て、そして、その形状は、対数ガンマ分布や対数 Weibull 分布では保持されない一方で、標準対数一般化ガンマ分布では保持されることが判明した。

## 参考文献

- [1] 犬井鉄郎（1962）『特殊函数』岩波書店。
- [2] 鍵原理人（2018）「ベータ分布の形状について」『福岡大学経済学論叢』第 62 巻, pp.51-76.
- [3] 鍵原理人（2020）「一般化ガンマ確率変数の指数変換の分布の形状について」『福岡大学経済学論叢』第 64 巻, pp.147-185.
- [4] 杉浦光夫（1980）『解析入門 I』東京大学出版会。
- [5] Balakrishnan, N. and V. B. Nevzorov (2003) *A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons.
- [6] Consul, P. C. and G. C. Jain (1971) “On the log-gamma distribution and its properties”, *Statistisch Hefte*, 12, pp.100-106.
- [7] Crooks, G. E. (2019) *Field Guide to Continuous Probability Distributions*, Berkeley Institute for Theoretical Sciences.

- [8] Grassia A. (1977) “On a family of distributions with argument between 0 and 1 obtained by transformation of the gamma and derived compound distributions”, *Australian Journal of Statistics*, 19, pp.108–114.
- [9] Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1994) *Continuous Univariate Distributions, Volume 1, 2nd edition*, John Wiley & Sons.
- [10] Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1995) *Continuous Univariate Distributions, Volume 2, 2nd edition*, John Wiley & Sons.
- [11] Leemis, M. L. and J. T. McQueston (2008) “Univariate distribution relationships”, *The American Statistician*, 62, pp.45–53.
- [12] Mazucheli, J., A. F. B. Menezes, L. B. Fernandes, R. P. de Oliveira and M. E. Ghitany (2020) “The unit-Weibull distribution as an alternative to the Kumaraswamy distribution for the modeling of quantiles conditional on covariates”, *Journal of Applied Statistics*, 47, pp.954–974.
- [13] Mazucheli, J., A. F. B. Menezes and M. E. Ghitany (2018) “The unit-Weibull distribution and associated inference”, *Journal of Applied Probability and Statistics*, 13, pp.1–22.
- [14] Rinne, H. (2009) *The Weibull Distribution: A Handbook*, Taylor & Francis Group.

## A 対数一般化ガンマ分布の密度関数の増減表

本補論は, (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f(z | \alpha, \gamma, \eta)$ ,  $z \in (0, 1)$  の増減表を提示する. これにより, 密度関数  $f$  の 3 つの正值母数  $\alpha, \gamma, \eta > 0$  とグラフの形状との関係が明らかになる. その結果として, 補題 1 と補題 2, 補題 3 が得られ, 延いては, 命題 1 が得られる. なお, 以下の表において,  $z_0$  と  $z_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\alpha_*$  の定義についてはそれぞれ (14) 式と (24) 式, (28) 式, (29) 式で与えられる (図 2, 図 4, 図 5, 図 6, 図 7 参照). また,  $z_1$  と  $z_2$  の定義については, それぞれの場合に応じて本文中の議論や補題を参照されたい.

表 6: 密度関数  $f(z | \alpha, \gamma, \eta)$  の増減表 ( $\gamma = 1$  の場合): 上段表 ( $\eta < 1$  の場合), 中段表 ( $\eta = 1$  の場合), 下段表 ( $\eta > 1$  の場合), 左表 ( $\alpha < 1$  の場合), 中表 ( $\alpha = 1$  の場合), 右表 ( $\alpha > 1$  の場合)

$z$	0	...	$e^{-\frac{1-\alpha}{1-\eta}}$	...	1	$z$	0	...	1	$z$	0	...	1
$f'$		-	0	+		$f'$		-	0	$f'$		-	
$f$		↘		↗		$f$		↘		$f$		↘	
$z$	0	...	1	$z$	0	...	1	$z$	0	...	1		
$f'$		+		$f'$		0		$f'$		-			
$f$		↗		$f$		→		$f$		↘			
$z$	0	...	1	$z$	0	...	1	$z$	0	...	$e^{-\frac{1-\alpha}{1-\eta}}$	...	1
$f'$		+		$f'$		+	0	$f'$		+	0	-	
$f$		↗		$f$		↗		$f$		↗		↘	

表 7: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表 ( $\gamma > 1$  の場合): 上段左表 ( $1/\gamma < \alpha < \infty$  の場合), 上段右表 ( $\alpha = 1/\gamma$  の場合), 中段表 ( $\eta \leq \eta_*$  かつ  $0 < \alpha < 1/\gamma$  の場合または  $\eta > \eta_*$  かつ  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合), 下段左表 ( $\eta > \eta_*$  かつ  $\alpha = \alpha_*$  の場合), 下段右表 ( $\eta > \eta_*$  かつ  $0 < \alpha < \alpha_*$  の場合)

$z$	0	...	$z_1$	...	1
$f'$		+	0	-	
$f$		↗		↘	

$z$	0	...	$z_0$	...	1
$f'$		+	0	-	0
$f$		↗		↘	

$z$	0	...	$z_2$	...	$z_1$	...	1
$f'$		+	0	-	0	+	
$f$	0	↗		↘		↗	

$z$	0	...	$z_*$	...	1
$f'$		+	0	+	
$f$		↗		↗	

$z$	0	...	1
$f'$		+	
$f$		↗	

表 8: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  の増減表 ( $\gamma < 1$  の場合): 上段左表 ( $0 < \alpha < 1/\gamma$  の場合), 上段右表 ( $\alpha = 1/\gamma$  の場合), 中段表 ( $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合), 下段左表 ( $\alpha = \alpha_*$  の場合), 下段右表 ( $\alpha_* < \alpha < \infty$  の場合)

$z$	0	...	$z_1$	...	1
$f'$		-	0	+	
$f$		↘		↗	

$z$	0	...	$z_0$	...	1
$f'$		-	0	+	0
$f$		↘		↗	

$z$	0	...	$z_2$	...	$z_1$	...	1
$f'$		-	0	+	0	-	
$f$	0	↘		↗		↘	

$z$	0	...	$z_*$	...	1
$f'$		-	0	-	
$f$		↘		↘	

$z$	0	...	1
$f'$		-	
$f$		↘	



## B 対数一般化ガンマの分布の密度関数のグラフ

本補論は, (7) 式で定義される対数一般化ガンマ分布の密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$ ,  $z \in (0, 1)$  のグラフを図示する (縦軸:  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$ , 横軸:  $z$ ).

特に, 補論 B.2 においては  $\gamma = 1$  の場合 (対数ガンマ分布) について図示し, そして, 補論 B.3 においては  $\alpha = 1$  の場合 (対数 Weibull 分布) について, 補論 B.4 においては  $\eta = 1$  の場合 (標準対数一般化ガンマ分布) について, 最後に, 補論 B.5 においては一般の場合 (対数一般化ガンマ分布) について図示する. なお, 以上で述べた全ての場合に共通する特殊な場合として,  $\alpha = \gamma = \eta = 1$  の場合 (一様分布) については, 補論 B.1 で図示する.

### B.1 $\alpha = \gamma = \eta = 1$ の場合 : 一様分布

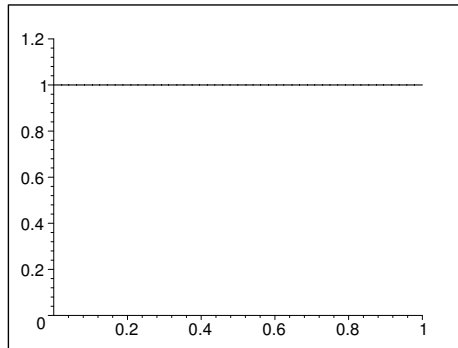


図 8: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\alpha = \gamma = \eta = 1$  の場合 : 一様分布)

## B.2 $\gamma = 1$ の場合 : 対数ガンマ分布

### B.2.1 $\alpha > 1$ かつ $\eta > 1$ の場合 : 単峰型

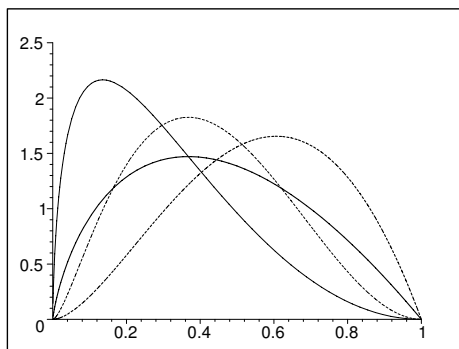


図 9: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ :  $\alpha = \eta = 2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 2$  かつ  $\eta = 3$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3$  かつ  $\eta = 2$  の場合 (実線),  $\alpha = \eta = 3$  の場合 (点線)

### B.2.2 $\alpha < 1$ かつ $\eta < 1$ の場合 : U 字型

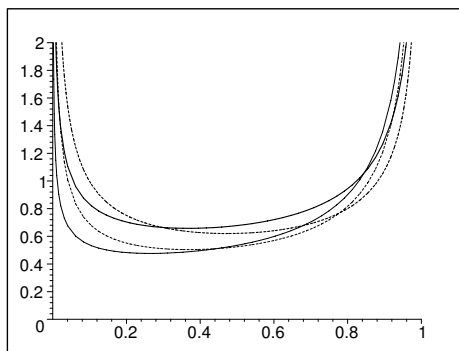


図 10: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ :  $\alpha = \eta = 1/2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/2$  かつ  $\eta = 1/3$  の場合 (太点線),  $\alpha = 1/3$  かつ  $\eta = 1/2$  の場合 (実線),  $\alpha = \eta = 1/3$  の場合 (点線)

### B.2.3 $\alpha \leq 1$ かつ $\eta \geq 1$ の場合 ( $\alpha \neq \eta$ ): 単調増加型

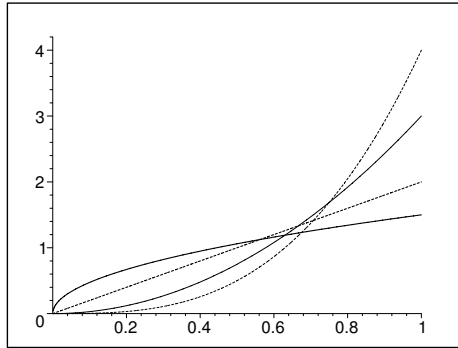


図 11: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\alpha = 1$  の場合):  $\eta = 3/2$  の場合 (太実線),  $\eta = 2$  の場合 (太点線),  $\eta = 3$  の場合 (実線),  $\eta = 4$  の場合 (点線)

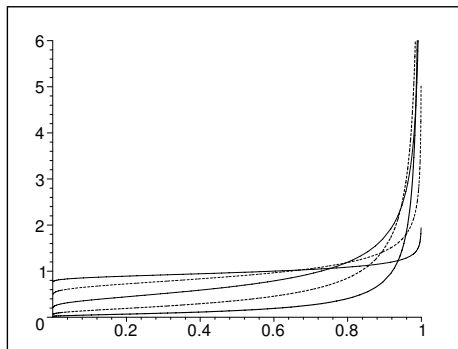


図 12: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\eta = 1$  の場合):  $\alpha = 1/10$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/4$  の場合 (太点線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (実線),  $\alpha = 3/4$  の場合 (点線),  $\alpha = 9/10$  の場合 (細実線)

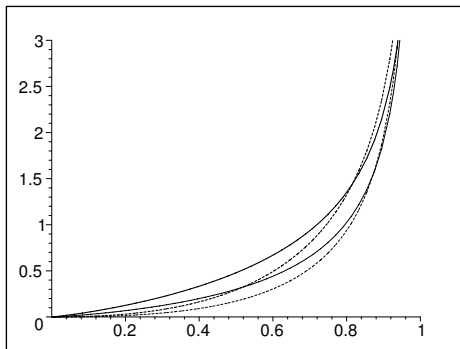


図 13: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\alpha < 1$  かつ  $\eta > 1$  の場合):  $\alpha = 1/2$  かつ  $\eta = 2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/2$  かつ  $\eta = 3$  の場合 (太点線),  $\alpha = 1/3$  かつ  $\eta = 2$  の場合 (実線),  $\alpha = 1/3$  かつ  $\eta = 3$  の場合 (点線)

**B.2.4**  $\alpha \geq 1$  かつ  $\eta \leq 1$  の場合 ( $\alpha \neq \eta$ ): 単調減少型

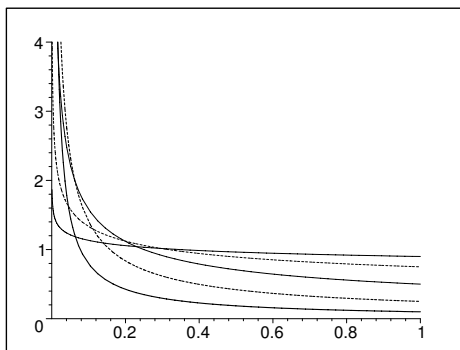


図 14: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\alpha = 1$  の場合):  $\eta = 1/10$  の場合 (太実線),  $\eta = 1/4$  の場合 (太点線),  $\eta = 1/2$  の場合 (実線),  $\eta = 3/4$  の場合 (点線),  $\eta = 9/10$  の場合 (細実線)

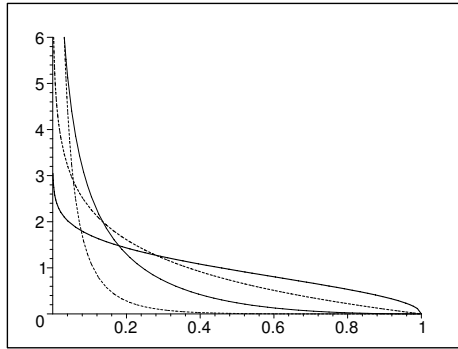


図 15: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\eta = 1$  の場合):  $\alpha = 3/2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 2$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3$  の場合 (実線),  $\alpha = 5$  の場合 (点線)

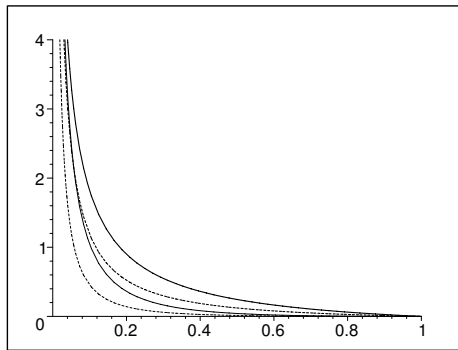


図 16: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\alpha > 1$  かつ  $\eta < 1$  の場合):  $\alpha = 2$  かつ  $\eta = 1/2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 2$  かつ  $\eta = 1/3$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3$  かつ  $\eta = 1/2$  の場合 (実線),  $\alpha = 3$  かつ  $\eta = 1/3$  の場合 (点線)

### B.3 $\alpha = 1$ の場合 : 対数 Weibull 分布

#### B.3.1 $\gamma > 1$ の場合 : 単峰型

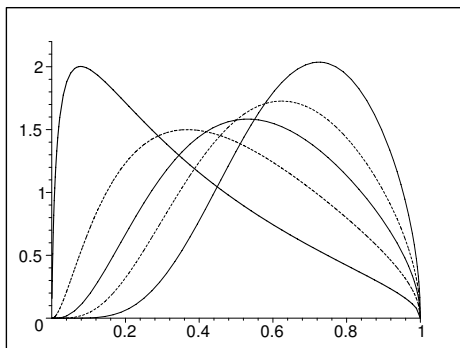


図 17: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3/2$  の場合) :  $\eta = 1/2$  の場合 (太実線),  $\eta = 1$  の場合 (太点線)  $\eta = 3/2$  の場合 (実線),  $\eta = 2$  の場合 (点線),  $\eta = 3$  の場合 (細実線)

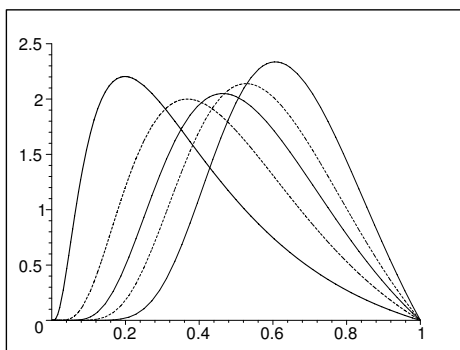


図 18: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  の場合) :  $\eta = 1/2$  の場合 (太実線),  $\eta = 1$  の場合 (太点線)  $\eta = 3/2$  の場合 (実線),  $\eta = 2$  の場合 (点線),  $\eta = 3$  の場合 (細実線)

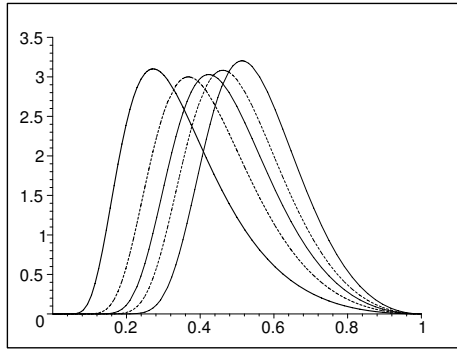


図 19: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3$  の場合):  $\eta = 1/2$  の場合 (太実線),  $\eta = 1$  の場合 (太点線),  $\eta = 3/2$  の場合 (実線),  $\eta = 2$  の場合 (点線),  $\eta = 3$  の場合 (細実線)

### B.3.2 $\gamma < 1$ の場合 : U 字型

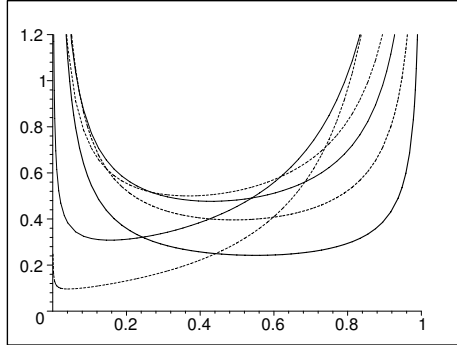


図 20: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  の場合):  $\eta = 1/4$  の場合 (太実線),  $\eta = 1/2$  の場合 (太点線),  $\eta = 3/4$  の場合 (実線),  $\eta = 1$  の場合 (点線),  $\eta = 2$  の場合 (細実線),  $\eta = 3$  の場合 (細点線)

**B.3.3**  $\gamma = 1$  かつ  $\eta > 1$  の場合：単調増加型

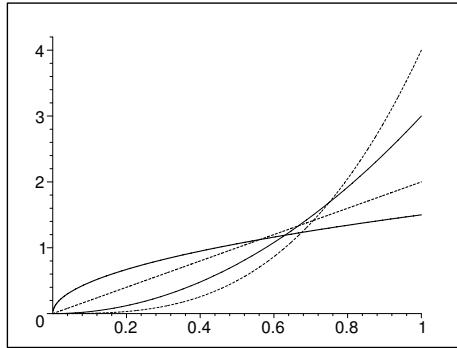


図 21: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ： $\eta = 3/2$  の場合（太実線）， $\eta = 2$  の場合（太点線） $\eta = 3$  の場合（実線）， $\eta = 4$  の場合（点線）

**B.3.4**  $\gamma = 1$  かつ  $\eta < 1$  の場合：単調減少型

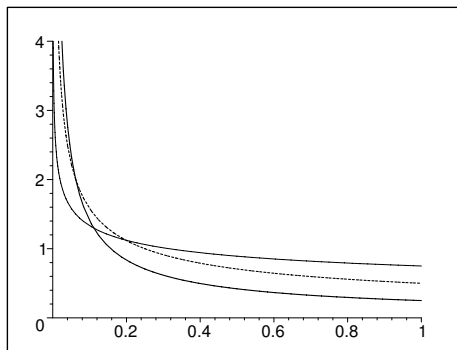


図 22: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ： $\eta = 1/4$  の場合（太実線）， $\eta = 1/2$  の場合（太点線） $\eta = 3/4$  の場合（実線）



## B.4 $\eta = 1$ の場合 : 標準対数一般化ガンマ分布

### B.4.1 $\gamma > 1$ かつ $\alpha \geq 1/\gamma$ の場合 : 単峰型

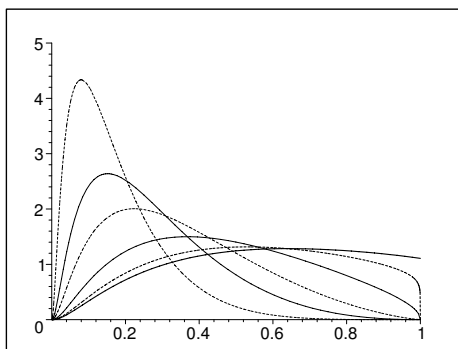


図 23: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3/2$  の場合) :  $\alpha = 2/3$  の場合 (太実線),  $\alpha = 3/4$  の場合 (太点線)  $\alpha = 1$  の場合 (実線),  $\alpha = 3/2$  の場合 (点線),  $\alpha = 2$  の場合 (細実線),  $\alpha = 3$  の場合 (細点線)

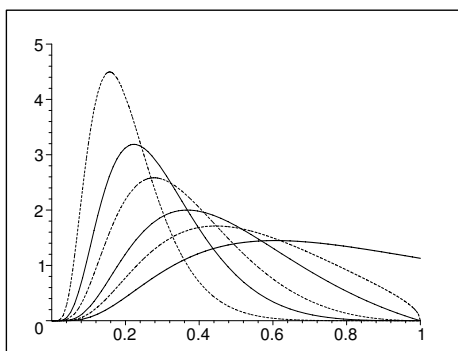


図 24: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  の場合) :  $\alpha = 1/2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 3/4$  の場合 (太点線)  $\alpha = 1$  の場合 (実線),  $\alpha = 3/2$  の場合 (点線),  $\alpha = 2$  の場合 (細実線),  $\alpha = 3$  の場合 (細点線)

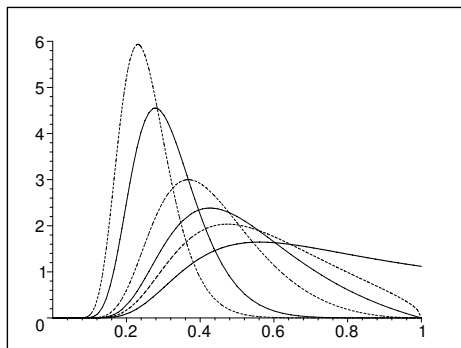


図 25: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3$  の場合):  $\alpha = 1/3$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (太点線)  $\alpha = 2/3$  の場合 (実線),  $\alpha = 1$  の場合 (点線),  $\alpha = 2$  の場合 (細実線),  $\alpha = 3$  の場合 (細点線)

#### B.4.2 $\gamma < 1$ かつ $\alpha \leq 1/\gamma$ の場合 : U 字型

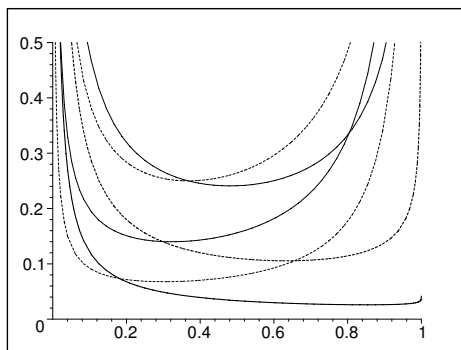


図 26: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/4$  の場合):  $\alpha = 4$  の場合 (太実線),  $\alpha = 3$  の場合 (太点線)  $\alpha = 2$  の場合 (実線),  $\alpha = 1$  の場合 (点線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (細実線),  $\alpha = 1/4$  の場合 (細点線)

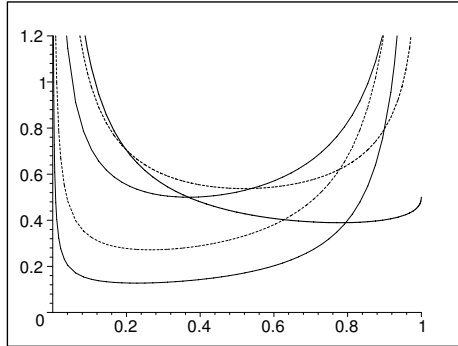


図 27: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  の場合):  $\alpha = 2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 3/2$  の場合 (太点線)  $\alpha = 1$  の場合 (実線),  $\alpha = 3/4$  の場合 (点線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (細実線),  $\alpha = 1/4$  の場合 (細点線)

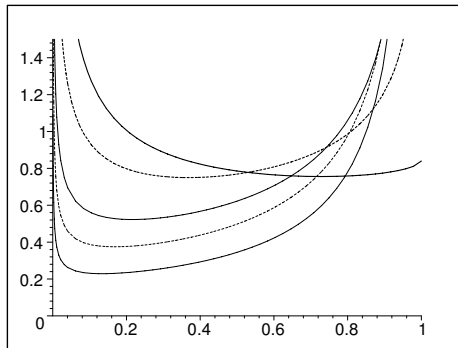


図 28: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3/4$  の場合):  $\alpha = 4/3$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1$  の場合 (太点線)  $\alpha = 2/3$  の場合 (実線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (点線),  $\alpha = 1/4$  の場合 (細実線)

**B.4.3**  $\gamma \geq 1$  かつ  $\alpha \leq \alpha_*$  の場合：単調増加型

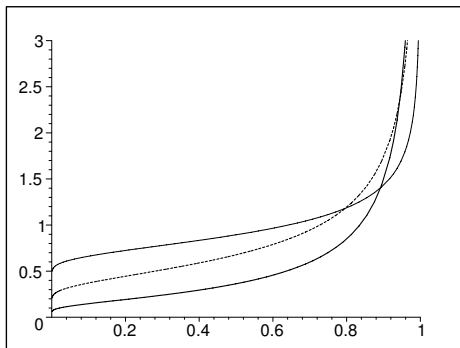


図 29: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1$  の場合) :  $\alpha = 1/4$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/2$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3/4$  の場合 (実線)

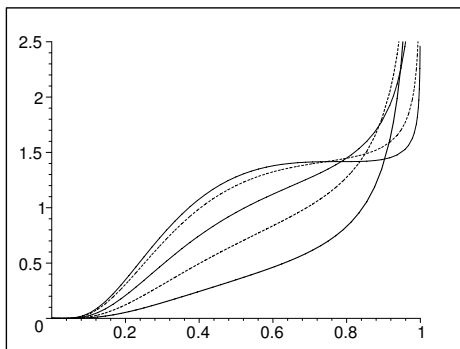


図 30: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  の場合) :  $\alpha = 1/10$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/5$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3/10$  の場合 (実線),  $\alpha = 2/5$  の場合 (点線),  $\alpha = \alpha_* = 7/16 = 0.4375$  の場合 (細実線)

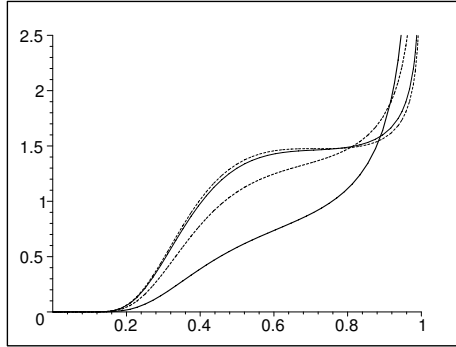


図 31: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3$  の場合):  $\alpha = 1/10$  の場合 (太実線),  $\alpha = 1/5$  の場合 (太点線),  $\alpha = 1/4$  の場合 (実線),  $\alpha = \alpha_* = 7/27 \approx 0.2593$  の場合 (点線)

**B.4.4**  $\gamma > 1$  かつ  $\alpha_* < \alpha < 1/\gamma$  の場合: 非単調増加型

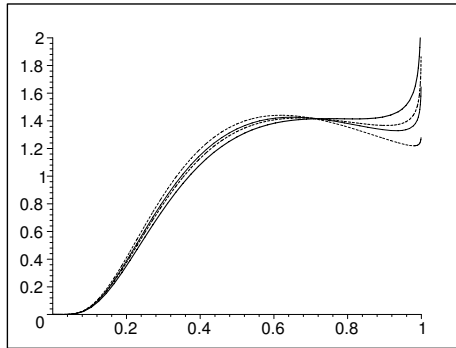


図 32: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  の場合):  $\alpha = 0.44$  の場合 (太実線),  $\alpha = 0.46$  の場合 (太点線),  $\alpha = 0.47$  の場合 (実線),  $\alpha = 0.49$  の場合 (点線)

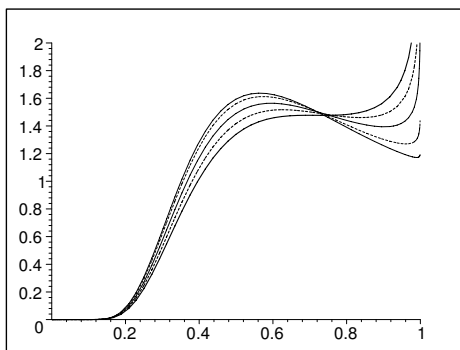


図 33: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 3$  の場合):  $\alpha = 0.26$  の場合 (太実線),  $\alpha = 0.28$  の場合 (太点線),  $\alpha = 0.30$  の場合 (実線),  $\alpha = 0.32$  の場合 (点線),  $\alpha = 0.33$  の場合 (細実線)

#### B.4.5 $\gamma \leq 1$ かつ $\alpha \geq \alpha_*$ の場合: 単調減少型

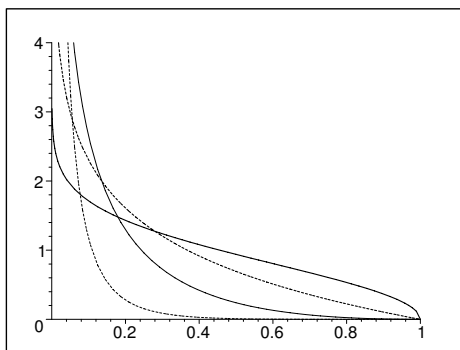


図 34: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1$  の場合):  $\alpha = 3/2$  の場合 (太実線),  $\alpha = 2$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3$  の場合 (実線),  $\alpha = 5$  の場合 (点線)

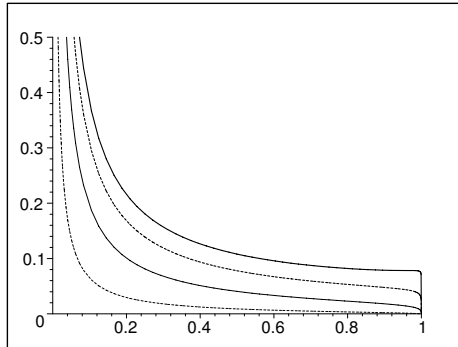


図 35: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/3$  の場合):  $\alpha = \alpha_* = 29/9 \simeq 3.222$  の場合 (太実線),  $\alpha = 7/2$  の場合 (太点線),  $\alpha = 4$  の場合 (実線),  $\alpha = 5$  の場合 (点線)

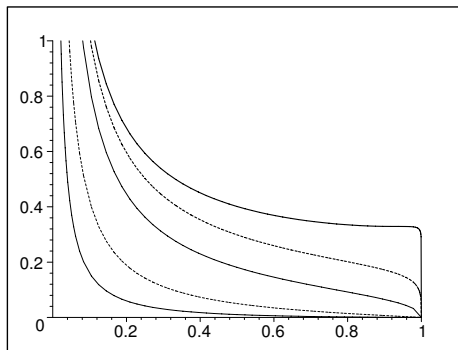


図 36: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  の場合):  $\alpha = \alpha_* = 17/8 = 2.125$  の場合 (太実線),  $\alpha = 5/2$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3$  の場合 (実線),  $\alpha = 4$  の場合 (点線),  $\alpha = 5$  の場合 (細実線)

**B.4.6**  $\gamma < 1$  かつ  $1/\gamma < \alpha < \alpha_*$  の場合：非単調減少型

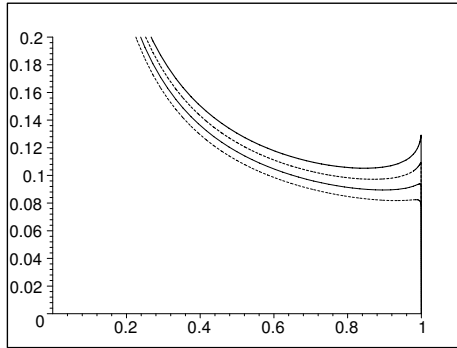


図 37: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/3$  の場合) :  $\alpha = 3.05$  の場合 (太実線),  $\alpha = 3.10$  の場合 (太点線),  $\alpha = 3.15$  の場合 (実線),  $\alpha = 3.20 < \alpha_* \simeq 3.22$  の場合 (点線)

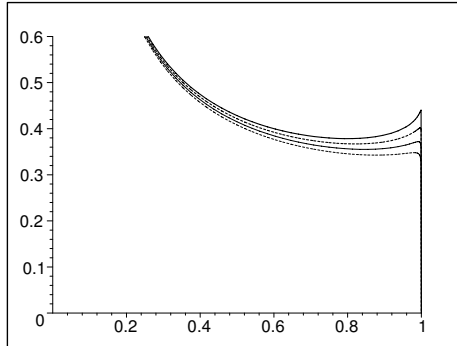


図 38: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  の場合) :  $\alpha = 2.025$  の場合 (太実線),  $\alpha = 2.050$  の場合 (太点線),  $\alpha = 2.075$  の場合 (実線),  $\alpha = 2.100 < \alpha_* = 2.125$  の場合 (点線)



## B.5 一般の場合：対数一般化ガンマ分布

### B.5.1 $\gamma > 1$ の場合

以下,  $\gamma = 2$  の場合について図示する. この時, (28) 式により  $\eta_* = 1/8$  であることに注意する (図 4 参照).

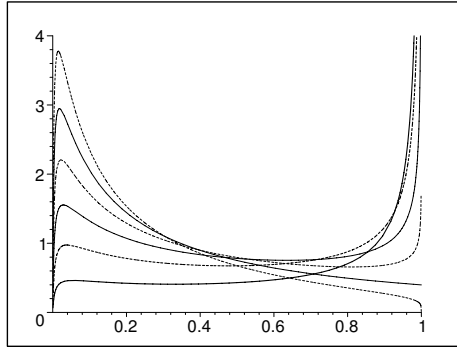


図 39: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  かつ  $\eta = \eta_* = 1/8$  の場合) :  $\alpha = 1/10$  (太実線),  $\alpha = 1/5$  (太点線),  $\alpha = 3/10$  (実線),  $\alpha = 2/5$  (点線),  $\alpha = 1/2 = 1/\gamma$  (細実線),  $\alpha = 3/5$  (細点線) の場合

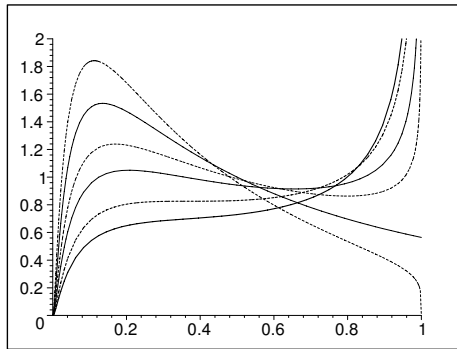


図 40: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  かつ  $\eta = 1/4 > \eta_*$  の場合) :  $\alpha = 1/5$  (太実線),  $\alpha = 1/4 = \alpha_*$  (太点線),  $\alpha = 1/3$  (実線),  $\alpha = 2/5$  (点線),  $\alpha = 1/2 = 1/\gamma$  (細実線),  $\alpha = 3/5$  (細点線) の場合

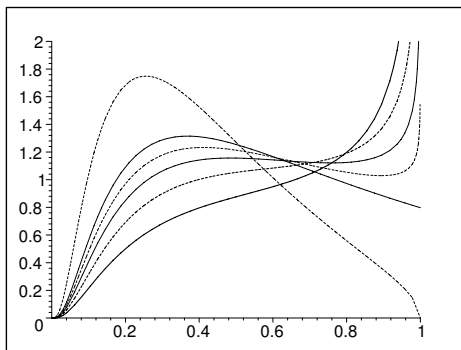


図 41: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  かつ  $\eta = 1/2 > \eta_*$  の場合) :  
 $\alpha = 1/4$  (太実線),  $\alpha = 1/3$  (太点線),  $\alpha = 2/5 > \alpha_* = 3/8$  (実線),  
 $\alpha = 0.45$  (点線),  $\alpha = 1/2 = 1/\gamma$  (細実線),  $\alpha = 3/4$  (細点線) の場合

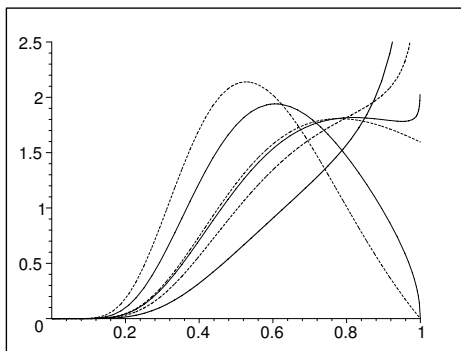


図 42: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 2$  かつ  $\eta = 2 > \eta_*$  の場合) :  
 $\alpha = 1/4$  (太実線),  $\alpha = 2/5$  (太点線),  $\alpha = 0.48 > \alpha_* = 15/32$  (実線),  
 $\alpha = 1/2 = 1/\gamma$  (点線),  $\alpha = 3/4$  (細実線),  $\alpha = 1$  (細点線) の場合

**B.5.2**  $\gamma < 1$  の場合

以下,  $\gamma = 1/2$  の場合について図示する.

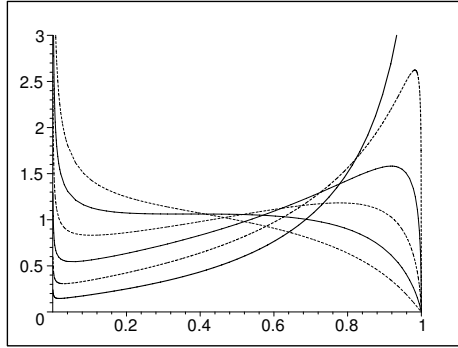


図 43: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 4$  の場合) :  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (太実線),  $\alpha = 2.5$  (太点線),  $\alpha = 3$  (実線),  $\alpha = 3.5$  (点線),  $\alpha = 4 = \alpha_*$  (細実線),  $\alpha = 4.5$  (細点線) の場合

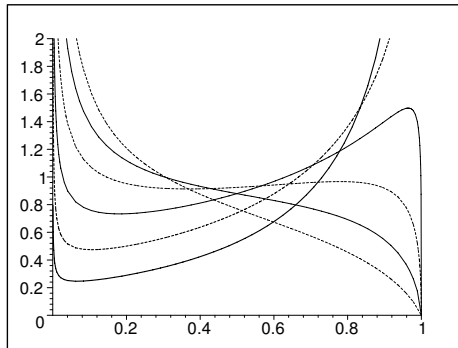


図 44: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 3$  の場合) :  $\alpha = 1.5$  (太実線),  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (太点線),  $\alpha = 2.5$  (実線),  $\alpha = 3 < \alpha_* = 25/8$  (点線),  $\alpha = 3.5 > \alpha_*$  (細実線),  $\alpha = 4$  (細点線) の場合

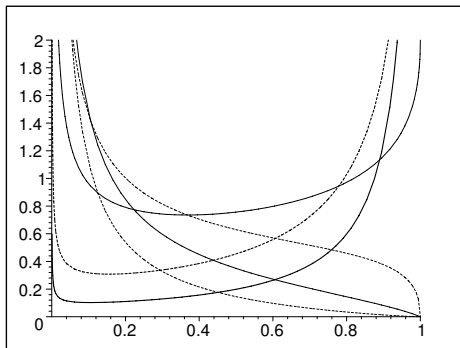


図 45: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 2$  の場合):  $\alpha = 1/2$  (太実線),  $\alpha = 1$  (太点線),  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (実線),  $\alpha = 3 > \alpha_* = 5/2$  (点線),  $\alpha = 4$  (細実線),  $\alpha = 5$  (細点線) の場合

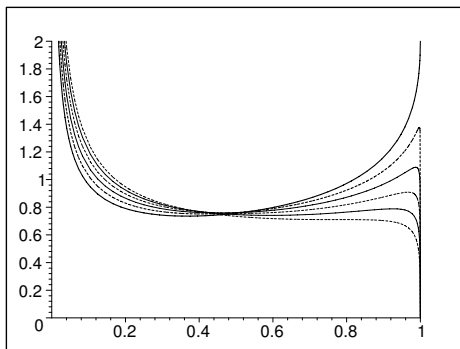


図 46: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 2$  の場合) :  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (太実線),  $\alpha = 2.1$  (太点線),  $\alpha = 2.2$  (実線),  $\alpha = 2.3$  (点線),  $\alpha = 2.4$  (細実線),  $\alpha = 2.5 = \alpha_* = 5/2$  (細点線) の場合

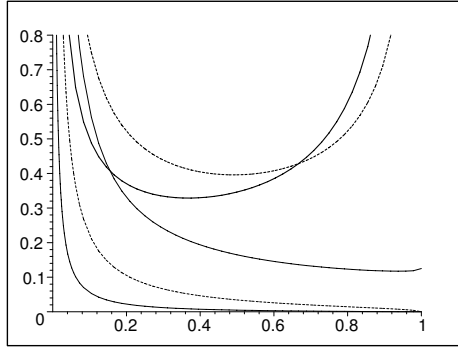


図 47: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 1/2$  の場合) :  $\alpha = 1/2$  (太実線),  $\alpha = 1$  (太点線),  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (実線),  $\alpha = 3 > \alpha_* = 65/32$  (点線),  $\alpha = 4$  (細実線) の場合

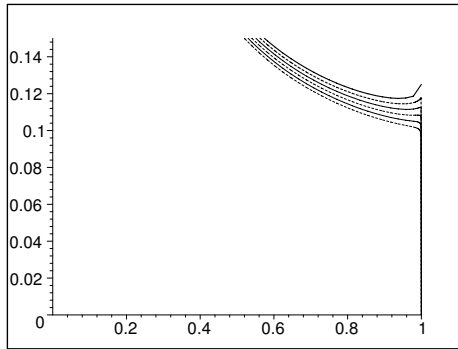


図 48: 密度関数  $f(z|\alpha, \gamma, \eta)$  のグラフ ( $\gamma = 1/2$  かつ  $\eta = 1/2$  の場合) :  $\alpha = 2 = 1/\gamma$  (太実線),  $\alpha = 2.01$  (太点線),  $\alpha = 2.02$  (実線),  $\alpha = 2.03 < \alpha_* = 65/32$  (点線),  $\alpha = 2.04 > \alpha_*$  (細実線),  $\alpha = 2.05$  (細点線) の場合