ベータ確率変数の対数変換の分布の形状について

鍵　原　理　人*

1　序論

有限区間 $(0, 1)$ 上の一様分布は，連続型の確率分布として最も基本的な分布の一つである．その一様分布に従う確率変数（一様確率変数）に対して負の対数変換を施せば，新たに無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る確率変数が導かれ，かつ，その分布は指数分布に一致する．無限区間 $(0, \infty)$ 上の指数分布もまた一様分布と同様に連続型の確率分布として基本的な分布である．

上述の事実に基づけば，一様分布を特殊な場合として包含するベータ分布に従う確率変数（ベータ確率変数）に対して同様の変換を施せば，指数分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（指数分布の一般化の一例）が得られることが分かる．この確率分布族については，例えば，Johnson, Kotz and Balakrishnan (1995, p.218) や McDonald and Xu (1995a, pp.140–143), Nadarajah and Gupta (2004, p.127), 蓑谷（2010, pp.793–795）において言及され，指数ベータ分布とも呼ばれる．しかし，いずれの文献においても，分布の母数と密度の形状の関係について体系的に言及されることはない．

本稿は，ベータ確率変数に対して負の対数変換を施すことによって得られる確率分布（指数ベータ分布）について，その母数と密度の形状の関係を

*福岡大学経済学部，e-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

体系的に検討し，その結果として得られる知見を整理する（命題 1 参照）．それと合せて，この指数ベータ分布に従う確率変数を巾変換することによって Weibull 分布の一般化の一例（一般化指数ベータ分布）を構成する．この背景として，Weibull 分布が指数分布に従う確率変数の巾変換の分布として得られるという事実，及び，指数ベータ分布が指数分布の一般化となっている事実に注意する．なお，指数分布を特殊な場合として包含する確率分布族としては，本稿での議論の対象となる指数ベータ分布の他にも，著名な例としてガンマ分布や先述の Weibull 分布が挙げられる．ガンマ分布や Weibull 分布の母数と密度の形状の関係については，例えば，鍵原（2018）は，それらの分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族である一般化ガンマ分布に基づいて体系的に議論する．

以下，本稿は次のように構成される．先ず，第 2 節において，ベータ関数を正規化定数として構成される標準ベータ分布に従う確率変数に対して，負の対数変換を施すことによって指数ベータ分布を導入する．その上で，指数ベータ分布に従う確率変数を巾変換することによって一般化指数ベータ分布を構成し，更に，一般化指数ベータ分布に従う確率変数を 1 次変換することによってその位置尺度分布族を構成する．次に，第 3 節において，指数ベータ分布の密度関数のグラフの形状がその母数に応じてどのように変化するかを検討し，その結果として得られた知見を命題 1 として整理する．その際，密度関数のグラフは全て補論 A と補論 B に図示する．図示されたグラフは全て Maple 6 による作図である．最後に，第 4 節で結論を述べる．

2　指数ベータ分布とその一般化

任意の正の実数 $\alpha, \beta > 0$ に対して積分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ は存在する（例えば，犬井 1962，p.12 や杉浦 1980，pp.295–296 参照）．この事実に注意すると，この積分を α, β の関数と見做すことができ，これをベータ関数という：

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1}$$

ここで，等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する．任意の正の実数 $\alpha, \beta > 0$ と $(0,1)$ 区間内の任意の実数 $x \in (0,1)$ に対して，$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} > 0$ であるので，積分の性質により，ベータ関数は常に正値を取ることが分かる．即ち，任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して $B(\alpha, \beta) > 0$ である．

ベータ分布とは，ベータ関数を正規化定数として密度関数を構成した確率分布である．つまり，次の (2) 式として区間 $(0,1)$ 上に定義される関数 f_* を密度関数に持つ確率分布はベータ分布（特に，標準ベータ分布）と呼ばれ，α と β は形状母数と呼ばれる（$\alpha, \beta > 0$）:

$$f_*(z|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}, \quad 0 < z < 1. \tag{2}$$

実際，$\alpha, \beta > 0$ と $B(\alpha, \beta) > 0$ に注意すると，任意の実数 $z \in (0,1)$ に対して，$z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} > 0$ であるので $f_*(z|\alpha, \beta) > 0$ を得る．また，ベータ関数の定義に注意すると，$\int_0^1 f_*(z|\alpha, \beta)dz = 1$ を得る．よって，関数 f_* は，非負値性と正規化条件を満たすので，確かに密度関数である．

さて，有限区間 $(0,1)$ に値を取る一様確率変数に対して負の対数変換を施すことによって得られる確率変数の分布は，無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される指数分布であり，その指数分布に従う確率変数を巾変換することによって得られる確率変数の分布は，$(0, \infty)$ 上の Weibull 分布である．

本節では，この事実を基にして，先ず，第 2.1 節において，一様分布を特殊な場合として包含するベータ分布に従う確率変数に対して負の対数変換を施すことによって，指数分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（指数ベータ分布，指数分布の一般化の一例）を構成する．その上で，第 2.2 節において，指数ベータ分布に従う確率変数に対して巾変換を施すことによって，Weibull 分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（一般化指数ベータ分布，Weibull 分布の一般化の一例）を構成する．そして，第 2.3 節において，一般化指数ベータ分布に従う確率変数に対して 1 次変換を施すことによって，その位置尺度分布族を構成する．最後に，第 2.4 節において，上述のようにして構成された指数ベータ分布に関連する幾つかの分布について言及する．

2.1　指数ベータ分布

本節では，(2) 式で定義される標準ベータ分布に従う確率変数に対して負の対数変換を施すことによって，指数分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（指数ベータ分布）を構成する．即ち，(2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_* に対して $Z \sim f_*$ として，その負の対数変換 $X := -\log Z$ の確率分布を導出する．X の分布関数を F_0 と表記すると，F_0 は，その定義により，任意の正の実数 x に対して次式と得られる：

$$F_0(x|\alpha,\beta) := P(X \le x) = P\left(Z \ge e^{-x}\right) = 1 - F_*\left(e^{-x}|\alpha,\beta\right), \quad x > 0.$$

ここで，$P(X \le x)$ は確率変数 X の実現値が実数 x 以下になるという事象の確率を表し，F_* は Z の分布関数を表す．よって，

$$F_*\left(e^{-x}|\alpha,\beta\right) = \int_0^{e^{-x}} f_*(z|\alpha,\beta)dz$$

に注意すれば，X の密度関数 f_0 はその分布関数 F_0 の導関数として得られる：

$$f_0(x|\alpha,\beta) = \frac{d}{dx}F_0(x|\alpha,\beta) = e^{-x} f_*\left(e^{-x}\middle|\,\alpha,\beta\right).$$

従って，$0 < x < \infty$ なる x に対して，X の密度関数 f_0 は次式となる（$\alpha,\beta > 0$）：

$$f_0(x|\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{\beta-1}. \tag{3}$$

この確率分布族は，指数ベータ分布（特に，指数ベータ分布の標準型）とも呼ばれる（例えば，McDonald and Xu 1995a や Nadarajah and Gupta 2004, p.127, 蓑谷 2010，pp.793–795 参照）．この命名の背景として，対数正規分布に従う確率変数の対数変換の分布が正規分布である事実，及び，密度関数 (3) 式に従う確率変数 X の指数変換 $Z = e^{-X}$ の分布がベータ分布である事実に注意する．その一方で，Weibull 分布に従う確率変数の対数変換の分布を対数 Weibull 分布と呼ぶこともあり（例えば，Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.3 や Rinne 2009, pp.131–133 等参照），これに

従えば，ベータ確率変数の対数変換として導出される (3) 式を密度関数に持つ分布は，指数ベータ分布ではなく，対数ベータ分布と呼ぶことになろう．例えば，McDonald and Xu (1995a) p.141 もまたこの命名の可能性を排除しない．しかし，本稿においては，以下，密度関数 (3) 式によって定義される分布を指数ベータ分布と呼ぶことにする．

さて，指数ベータ分布の密度関数 (3) 式は，$\alpha = \beta = 1$ とした場合，

$$f_0(x|1,1) = e^{-x}$$

となるので，標準指数分布の密度関数に帰着することが分かる．これにより，標準ベータ分布の密度関数 (2) 式が $\alpha = \beta = 1$ の時に区間 $(0,1)$ 上の一様分布に帰着することに注意すると，一様確率変数の対数変換によって標準指数分布が誘導されることが確かに理解される．なお，指数ベータ分布の密度関数 (3) 式は，$\beta = 1$ とした場合，$B(\alpha,1) = 1/\alpha$ に注意すると，

$$f_0(x|\alpha,1) = \alpha e^{-\alpha x}$$

となるので，$\sigma := 1/\alpha > 0 \iff \alpha = 1/\sigma$ と母数変換すると，σ を尺度母数とする指数分布（標準指数分布の尺度分布族）に帰着することが分かる．この時，ベータ分布の形状母数 α は尺度母数の逆数に対応する．

2.2　一般化指数ベータ分布

本節では，指数分布を特殊な場合として包含する指数ベータ分布に従う確率変数に対して巾変換を施すことによって，Weibull 分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（一般化指数ベータ分布）を構成する．即ち，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 に対して $X \sim f_0$ として，正の実数 γ に対して X の巾変換 $Y := X^\gamma$ の確率分布を導出する．Y の分布関数を F_1 と表記すれば，その定義により，任意の正の実数 y に対して，

$$F_1(y|\alpha,\beta,\gamma) := P(Y \le y) = P\left(X \le y^{\frac{1}{\gamma}}\right) = \int_0^{y^{\frac{1}{\gamma}}} f_0(x|\alpha,\beta)dx$$

として表され，その密度関数 f_1 は F_1 の導関数として得られる：

$$f_1(y|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{d}{dy}F_1(y|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\gamma}f_0(y^{\frac{1}{\gamma}}|\alpha,\beta)y^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

従って，$0 < y < \infty$ なる y に対して，Y の密度関数 f_1 は次式となる（$0 < \alpha,\beta,\gamma < \infty$）：

$$f_1(y|\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\gamma B(\alpha,\beta)}y^{\frac{1}{\gamma}-1}e^{-\alpha y^{\frac{1}{\gamma}}}\left(1-e^{-y^{\frac{1}{\gamma}}}\right)^{\beta-1}. \tag{4}$$

$\delta := 1/\gamma$ なる母数変換を施すと，$Y := X^{\gamma} = X^{1/\delta}$ の密度関数 f_1 の別表現が得られる（$0 < \alpha,\beta,\delta < \infty$）：

$$f_1(y|\alpha,\beta,\delta) = \frac{\delta}{B(\alpha,\beta)}y^{\delta-1}e^{-\alpha y^{\delta}}\left(1-e^{-y^{\delta}}\right)^{\beta-1}, \quad 0 < y < \infty. \tag{5}$$

以上のように，(4) 式もしくは (5) 式で定義された密度関数 f_1 を持つ確率分布を一般化指数ベータ分布（特に，一般化指数ベータ分布の標準型）という．以下においては，特に断らない限り，一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 としては (5) 式の表現を用いる．

一般化指数ベータ分布の密度関数 (5) 式は，$\delta = 1$ とした場合，指数ベータ分布の密度関数 (3) 式に帰着する：

$$f_1(y|\alpha,\beta,1) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}e^{-\alpha y}(1-e^{-y})^{\beta-1} = f_0(y|\alpha,\beta).$$

また，$\beta = 1$ とした場合，$B(\alpha,1) = 1/\alpha$ に注意すると，

$$f_1(y|\alpha,1,\delta) = \alpha\delta y^{\delta-1}e^{-\alpha y^{\delta}} \tag{6}$$

となるので，$\sigma := 1/\alpha^{\frac{1}{\delta}} > 0 \iff \alpha = 1/\sigma^{\delta}$ と母数変換することによって，σ を尺度母数とする Weibull 分布に帰着することが分かる．これにより，指数ベータ分布の密度関数 (3) 式が $\beta = 1$ の時に指数分布に帰着することに注意すると，指数分布の巾変換によって Weibull 分布が誘導されることが確かに理解される．また，この時，(6) 式により，ベータ分布の形状母数 α は尺度母数の巾乗の逆数に対応すると分かる．

2.3 一般化指数ベータ分布の位置尺度分布族

本節は，(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の標準型に位置母数と尺度母数を導入する．即ち，Y を一般化指数ベータ分布の標準型に従う確率変数 $Y \sim f_1$ として，実数 μ と正の実数 σ に対して Y を 1 次変換する：$W := \mu + \sigma Y,\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$. この時，$W$ の確率分布を μ を位置母数，σ を尺度母数とする一般化指数ベータ分布の位置尺度分布族（あるいは，単に一般化指数ベータ分布）という．その分布関数 F は，その定義により，$w > \mu$ なる w に対して，

$$F(w|\alpha,\beta,\delta,\mu,\sigma) := P(W \le w) = P\left(Y \le \frac{w-\mu}{\sigma}\right) = \int_0^{\frac{w-\mu}{\sigma}} f_1(y|\alpha,\beta,\delta)dy$$

であり，その密度関数 f は F の導関数として導出される：

$$f(w|\alpha,\beta,\delta,\mu,\sigma) = \frac{d}{dw}F(w|\alpha,\beta,\delta,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma}f_1\left(\left.\frac{w-\mu}{\sigma}\right|\alpha,\beta,\delta\right).$$

従って，$w > \mu$ なる w に対して，W の密度関数 f は次式として得られる：

$$f(w|\alpha,\beta,\delta,\mu,\sigma) =$$
$$\frac{\delta}{\sigma B(\alpha,\beta)}\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{\delta-1}\exp\left[-\alpha\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{\delta}\right]\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)^{\delta}\right]\right\}^{\beta-1} \tag{7}$$

ここで，位置母数 μ は任意の実数でよいのに対して，尺度母数 σ を始めとするその他の母数 α,β,δ は正値であることに注意する:$\mu \in (-\infty,\infty),\ \sigma,\alpha,\beta,\delta \in (0,\infty)$. $\mu = 0,\ \sigma = 1$ の場合，一般化指数ベータ分布 (7) 式は一般化指数ベータ分布の標準型 (5) 式に帰着する：$f(w|\alpha,\beta,\delta,0,1) = f_1(w|\alpha,\beta,\delta),\ w > \mu = 0$.

さて，一般化指数ベータ分布の密度関数 (7) 式は，$\delta = 1$ の場合，指数ベータ分布の密度関数

$$f(w|\alpha,\beta,1,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma B(\alpha,\beta)}e^{-\frac{\alpha}{\sigma}(w-\mu)}\left(1-e^{-\frac{w-\mu}{\sigma}}\right)^{\beta-1} \tag{8}$$

となり，更に，$\mu = 0$, $\sigma = 1$ の場合，指数ベータ分布の標準型の密度関数 (3) 式に帰着する：$f(w|\alpha, \beta, 1, 0, 1) = f_0(w|\alpha, \beta)$.

2.4　指数ベータ分布に関連する幾つかの分布

本節は，以上の議論によって構成された指数ベータ分布に関連する幾つかの分布について言及する．

2.4.1　指数一般化ベータ分布

McDonald and Xu (1995a) は，(2) 式で定義される第 1 種のベータ分布だけでなく，第 2 種のベータ分布をも包含する分布族を考察対象とした上で，指数一般化ベータ分布を提案した．しかし，関心を第 1 種のベータ分布に限定するならば，本稿によって構成される分布族の方がより一般的である．

実際，McDonald and Xu (1995a) は，有限区間 $(0, c)$, $c > 0$ に値を取るベータ確率変数の巾変換によって第 1 種の一般化ベータ分布を構成した上で，第 1 種の一般化ベータ分布に従う確率変数の対数変換によって第 1 種の指数一般化ベータ分布を構成する．このようにして構成される第 1 種の指数一般化ベータ分布は，本稿における (8) 式，つまり，指数ベータ分布に対応する．従って，本稿 (7) 式の一般化指数ベータ分布は，McDonald and Xu (1995a) の第 1 種の指数一般化ベータ分布を特殊な場合として包含するより一般的な分布族であると分かる．

なお，分布族の名に冠される一般化という語は，通常の場合，確率変数の巾変換によって構成される分布族に対して用いられる．これにより，ベータ確率変数に対して，McDonald and Xu (1995a) の指数一般化ベータ分布においては，巾変換（一般化ベータ分布）の後に対数変換（指数一般化ベータ分布）を施すのに対して，本稿で議論する一般化指数ベータ分布においては，対数変換（指数ベータ分布）の後に巾変換（一般化指数ベータ分布）を施すという相違があると分かる．

2.4.2　ベータ指数分布とベータ Weibull 分布

微分可能な分布関数 $F : \boldsymbol{R} \to [0,1]$ に対して，(2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_* を用いて新たな分布関数 $G : \boldsymbol{R} \to [0,1]$,

$$G(x) := \int_0^{F(x)} f_*(z)dz$$

を生成することができ，このようにして生成される分布はベータ F 分布という形で呼ばれる（Eugene, Lee and Famoye 2002，Nadarajah and Gupta 2004, p.146, Nadarajah and Kotz 2006, Alexander, Cordeiro, Ortega and Sarabia 2012 等参照）．なお，その密度関数 $g(x) := G'(x) = f_*(F(x))F'(x)$ は次式として得られる：

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}[F(x)]^{\alpha-1}[1-F(x)]^{\beta-1}F'(x).$$

これは，F に従う独立同分布の確率変数列の順序統計量の密度関数の一般化になっていることに注意する．実際，$X_1, \ldots, X_n, i.i.d. \sim F$ に対してその順序統計量を $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ と表記すると，r 番目の順序統計量 $X_{(r)}$ の密度関数は次式と得られることが分かる（例えば，Johnson, Kemp and Kotz 2005, p.61 参照）：

$$f_{(r)}(x) = \frac{1}{B(r,n-r+1)}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}F'(x), \quad 1 \le r \le n.$$

その際，ベータ関数 B とガンマ関数 Γ の関係式 $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$，及び，ガンマ関数の性質 $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ に注意する：

$$B(r,n-r+1) = \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}.$$

さて，F として指数分布の分布関数 $F(x) = 1-e^{-x}$ を適用することで生成される分布はベータ指数分布と呼ばれ，その密度関数は次式となる：

$$g(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\left(1-e^{-x}\right)^{\alpha-1}e^{-\beta x}.$$

この密度関数は，ベータ関数の対称性 $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ に注意すれば，(3) 式で定義された指数ベータ分布の密度関数 f_0 に他ならないことが分かる．

また，F として Weibull 分布の分布関数 $F(x)=1-e^{-x^\delta}$ を適用することで生成される分布はベータ Weibull 分布と呼ばれ，その密度関数は次式となる：

$$g(x)=\frac{\delta x^{\delta-1}}{B(\alpha,\beta)}\left(1-e^{-x^\delta}\right)^{\alpha-1}e^{-\beta x^\delta}.$$

この密度関数は，ベータ関数の対称性 $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ に注意すれば，(5) 式で定義された一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 に他ならないことが分かる．Nadarajah and Kotz (2006) は，ベータ Weibull 分布については言及するのみであるが，ベータ指数分布についてはその性質を詳細に分析する．

2.4.3　指数分布と Weibull 分布の順序統計量の分布

本節は，指数分布と Weibull 分布の順序統計量の分布について考察する．特に，Weibull 分布の順序統計量の分布が一般化指数ベータ分布に帰着することを確認する．これによって，その特殊な場合として，指数分布の順序統計量の分布が指数ベータ分布に帰着することも判明する．

さて，(6) 式において $\alpha=1$ とした標準 Weibull 分布に従う独立同分布の確率変数列 $Y_1,\ldots,Y_n$ に対して，その順序統計量を $Y_{(1)},\ldots,Y_{(n)}$ と表記すると，前節の議論により，r 番目の順序統計量 $Y_{(r)}$ の密度関数 $f_{(r)}$, $1\le r\le n$ は次式となることが分かる：

$$f_{(r)}(y)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\delta y^{\delta-1}e^{-(n-r+1)y^\delta}\left(1-e^{-y^\delta}\right)^{r-1},\quad 0<y<\infty.$$

ベータ関数の対称性に注意すると，これは一般化指数ベータ分布の密度関数 (5) 式において $\alpha=n-r+1$, $\beta=r$ と置いたものに他ならないと分かる．

以上により，Weibull 分布から得られた順序統計量の分布が一般化指数ベータ分布に帰着することが確認された．また，上述の議論の特殊な場合として，指数分布から得られる順序統計量の分布が指数ベータ分布に帰着することが確認される．

3　指数ベータ分布の形状

本節では，(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数のグラフの形状について議論する．特に，その $\delta = 1$ とした場合，即ち，(3) 式で表現される指数ベータ分布の密度関数については，そのグラフの形状がその母数 α と β に応じてどのように変化するかを体系的に検討し，その結果として得られた知見を命題 1 として整理する．

さて，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 と (5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 との間に以下の関係式が成立することに注意する．但し，以下では，母数を特に明示する必要がない場合，$f_0(x) := f_0(x|\alpha, \beta)$，$f_1(y) := f_1(y|\alpha, \beta, \delta)$ と略記する．

$$f_1(y) = \delta y^{\delta-1} f_0(y^\delta), \quad y \in (0, \infty).$$

よって，それぞれの導関数 f_0' と f_1' の間には次の関係式が成立する：

$$f_1'(y) = \delta y^{\delta-2} \left\{ (\delta - 1) f_0(y^\delta) + \delta y^\delta f_0'(y^\delta) \right\}.$$

ここで，指数ベータ分布の密度関数 f_0 の定義式 (3) に注意すると，その導関数は

$$f_0'(x) = \frac{f_0(x)}{1 - e^{-x}} \left\{ (\alpha + \beta - 1) e^{-x} - \alpha \right\} \tag{9}$$

と得られるので，次式を得る：

$$f_1'(y) = \frac{\delta f_1(y)}{y} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) + \frac{y^\delta}{1 - e^{-y^\delta}} \left[(\alpha + \beta - 1) e^{-y^\delta} - \alpha \right] \right\}. \tag{10}$$

以下では，先ず，第 3.1 節において，$\delta = 1$ の場合，即ち，(3) 式で定義される指数ベータ分布の標準型の密度関数 f_0 のグラフの形状がその母数 α と β に応じてどのように変化するかについて体系的に検討し，その結果として得られた知見を命題 1 として整理する．次に，第 3.2 節において，$\delta \neq 1$ の場合，即ち，(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の標準型の密度関数 f_1 のグラフの形状について一定の検討を加える．最後に，第 3.3 節において，それらの位置尺度分布族の形状について考察する．

3.1　$\delta = 1$ の場合：指数ベータ分布

(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 は，$\delta = 1$ の場合，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 に帰着する．つまり，一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 の導関数 (10) 式は，$\delta = 1$ の場合，指数ベータ分布の密度関数 f_0 の導関数 (9) 式に帰着する．

さて，任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $f_0(x) > 0$, $1 - e^{-x} > 0$ であり，また，$\alpha > 0$ であることに注意すると，以下の同値関係を得る：

$$\begin{aligned} f_0'(x) \lesseqgtr 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (\alpha + \beta - 1)e^{-x} - \alpha \lesseqgtr 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) e^{-x} \lesseqgtr 1. \end{aligned}$$

これにより，任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $e^{-x} \in (0, 1)$ であることに注意すると，$\beta \leq 1$ の場合，次の不等式が成立することが分かる：

$$\left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) e^{-x} \leq e^{-x} < 1.$$

従って，$\beta \leq 1$ の場合，任意の $x \in (0, \infty)$ に対して

$$\left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) e^{-x} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad f_0'(x) < 0$$

を得るので，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 $f_0(x)$ は x の単調減少関数であると分かる．

次に，$\beta > 1$ の場合を考察する．この時，$1 + (\beta - 1)/\alpha > 1$ なので $\log[1 + (\beta - 1)/\alpha] > 0$ である．また，$x > 0$ であることに注意する．よって，同値関係

$$f_0'(x) \lesseqgtr 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \log\left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) \lesseqgtr x$$

により，$\beta > 1$ の場合，(3) 式で定義される指数ベータ分布の標準型の密度関数 $f_0(x)$ は，

$$x^* := \log\left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right) > 0$$

に対して，$x < x^*$ の時に単調増加，$x > x^*$ の時に単調減少であり，$x = x^*$ で最大値を取ることが分かる．即ち，密度関数 $f_0(x)$ の形状は $x = x^*$ を最大点（最頻値）とする単峰型である．

以上の議論によって，指数ベータ分布の密度関数 f_0 の形状は，$\beta \leq 1$ の場合に単調減少型，$\beta > 1$ の場合に単峰型であることが判明した（命題 1 参照）．

命題 1 (指数ベータ分布の形状)**.** (3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(x, f_0(x|\alpha, \beta)) |\ x \in (0, \infty)\}$ の形状は，正値の母数 β に応じて以下のように定まる（図 *1*–図 *6* 参照）．但し，以下では $f_0(x) := f_0(x|\alpha, \beta)$ と略記する．なお，本命題で言及される図は全て補論 A に提示される．

1. $\beta \leq 1$ の場合（単調減少型）

密度関数 $f_0(x)$ は x の単調減少関数であり，そのグラフは右下りの形状を示す．特に，$x \to \infty$ の場合において $f_0(x) \to 0$ である．

(a) $\beta < 1$ の場合（非有界，図 *7*）

$x \to 0$ において $f_0(x) \to \infty$ である．

(b) $\beta = 1$ の場合（有界：指数分布，図 *8*）

$x \to 0$ において $f_0(x) \to \alpha$ である．この場合，指数ベータ分布は $\sigma := 1/\alpha$ を尺度母数とする指数分布に帰着する．

2. $\beta > 1$ の場合（単峰型，図 *9*–図 *12*）

密度関数 $f_0(x)$ は $x = x^*$ を最大点（最頻値）として，そのグラフは単峰型の形状を示す：

$$x^* = \log\left(1 + \frac{\beta - 1}{\alpha}\right).$$

また，$x \to 0$ もしくは $x \to \infty$ のいずれの場合においても $f_0(x) \to 0$ である[1]．

---

[1] $x \to 0$ において密度関数 $f_0(x)$ が 0 に収束する際，その傾きは，$\beta < 2$ の場合に無限大に発散し（$f_0'(x) \xrightarrow{x \to 0} \infty$），$\beta = 2$ の場合に定数に収束し（$f_0'(x) \xrightarrow{x \to 0} \alpha(\alpha + 1)$），$\beta > 2$ の場合に 0 に収束する（$f_0'(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$）という形を取る（図 1，図 3，図 5，図 9–図 12 参照）．

証明. (3) 式で定義される密度関数 f_0 の形状が $\beta \leq 1$ の場合に単調減少型，$\beta > 1$ の場合に単峰型となることについては，上述の議論において既に明らかにされた．よって，以下では，密度関数 $f_0(x)$ とその導関数 $f_0'(x)$ について，$x \to 0$ と $x \to \infty$ における収束先を考察する．

第一に，$x \to \infty$ における収束先について考える．任意の $\alpha > 0$ に対して $e^{-\alpha x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ であり，また，$1 - e^{-x} \xrightarrow{x\to\infty} 1$ により任意の $\beta > 0$ に対して $(1-e^{-x})^{\beta-1} \xrightarrow{x\to\infty} 1$ であることに注意すると，

$$f_0(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{\beta-1} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

を得て，更に，(9) 式に注意すると $(\alpha+\beta-1)e^{-x} - \alpha \xrightarrow{x\to\infty} -\alpha$ により，

$$f_0'(x) = \frac{f_0(x)}{1-e^{-x}} \left\{(\alpha+\beta-1)e^{-x} - \alpha\right\} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

を得る．

第二に，$x \to 0$ における収束先について考える．任意の $\alpha > 0$ に対して $e^{-\alpha x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ である．また，$1 - e^{-x} \xrightarrow{x\to 0} 0$ により，$(1-e^{-x})^{\beta-1}$ の収束先は，$\beta < 1$，$\beta = 1$，$\beta > 1$ の各場合に応じてそれぞれ ∞，1，0 となる．よって，$B(\alpha, 1) = 1/\alpha$ に注意すると，

$$f_0(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{\beta-1} \xrightarrow{x\to 0} \begin{cases} \infty & \textit{if} \ \ \beta < 1 \\ \alpha & \textit{if} \ \ \beta = 1 \\ 0 & \textit{if} \ \ \beta > 1 \end{cases}$$

を得る．更に，(9) 式に注意すると，$(\alpha+\beta-1)e^{-x} - \alpha \xrightarrow{x\to 0} \beta - 1$ により，$\beta < 1$ の場合，

$$f_0'(x) = \frac{f_0(x)}{1-e^{-x}} \left\{(\alpha+\beta-1)e^{-x} - \alpha\right\} \xrightarrow{x\to 0} -\infty$$

を得るが，$\beta \geq 1$ の場合は不定形となる為，極限の評価には別なる工夫を要する．先ず，$\beta = 1$ の場合，$B(\alpha, 1) = 1/\alpha$ に注意すると，導関数 $f_0'(x)$ は以下のように簡単化される：

$$f_0'(x) = -\alpha f_0(x) = -\alpha^2 e^{-\alpha x} \xrightarrow{x\to 0} -\alpha^2.$$

次に，$\beta > 1$ の場合を考える．(9) 式に (3) 式を代入すると，次の表現を得る：

$$f_0'(x) = \frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{\beta-2}}{B(\alpha,\beta)}\left\{(\alpha+\beta-1)e^{-x}-\alpha\right\}.$$

ここで，$x \to 0$ における $(1-e^{-x})^{\beta-2}$ の収束先は，$\beta < 2$, $\beta = 2$, $\beta > 2$ の各場合に応じてそれぞれ ∞, 1, 0 となることに注意し，また，$B(\alpha, 2) = 1/[\alpha(\alpha+1)]$ に注意すると，以下を得る：

$$f_0'(x) \xrightarrow{x\to 0} \begin{cases} \infty & \textit{if} \;\; \beta < 2, \\ \alpha(\alpha+1) & \textit{if} \;\; \beta = 2, \\ 0 & \textit{if} \;\; \beta > 2. \end{cases}$$

以上の議論によって，密度関数 $f_0(x)$ の増減表は表 *1* として得られる．これにより，命題の成立は確かめられた． □

表 1: 指数ベータ分布の密度関数 f_0（(3) 式）の増減表：上段左表（$\beta < 1$ の場合），上段右表（$\beta = 1$ の場合，指数分布），下段表（$\beta > 1$ の場合）

x	0	$\cdots$	∞
f_0'	$-\infty$	$-$	0
f_0	∞	$\searrow$	0

x	0	$\cdots$	∞
f_0'	$-\alpha^2$	$-$	0
f_0	α	$\searrow$	0

x	0	$\cdots$	$\log[1+(\beta-1)/\alpha]$	$\cdots$	∞
f_0'	$*$	$+$	0	$-$	0
f_0	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$* \cdots \infty$ ($\beta < 2$ の時), $\alpha(\alpha+1)$ ($\beta = 2$ の時), 0 ($\beta > 2$ の時)

命題 1 により，$\beta > 1$ の場合，即ち，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフの形状が単峰型の場合，その最大点（最頻値）

$x^* = \log[1 + (\beta - 1)/\alpha]$ は，$\alpha \to \infty$ または $\beta \to 1$ の時に 0 に収束し，$\alpha \to 0$ または $\beta \to \infty$ の時に無限大に発散することが分かる．

本節の最後に，指数ベータ分布のモーメントについて考察する．即ち，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 f_0 に対して $X \sim f_0$ として，自然数 k に対して X の k 次モーメント $E(X^k)$ について考察する．

先ず，$k = 1$ の場合，即ち，X の期待値 $E(X)$ について考察する．さて，(2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_* に対して $Z \sim f_*$ とした時，関係式 $X = -\log Z$ に注意すると，$E(X) = E(-\log Z) = -E(\log Z)$ に他ならないことが分かる．期待値の定義により次式を得る：

$$E(\log Z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 (\log z) z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz.$$

ここで，ベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ の α に関する偏導関数について，

$$B_\alpha(\alpha, \beta) := \frac{\partial}{\partial \alpha} B(\alpha, \beta) = \int_0^1 (\log z) z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz$$

ならば，次式を得る：

$$E(\log Z) = \frac{B_\alpha(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log B(\alpha, \beta).$$

また，先述のベータ関数とガンマ関数の関係式に注意すると，$\log B(\alpha, \beta) = \log \Gamma(\alpha) + \log \Gamma(\beta) - \log \Gamma(\alpha + \beta)$ により，次式の表現を得る：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta).$$

ここで，関数 $\psi(\alpha) := d \log \Gamma(\alpha)/d\alpha$ はディガンマ関数であり，その性質については，例えば，犬井（1962）pp.33-34 や森口・宇田川・一松（1987）pp.9–14，Jeffrey (2000) p.224，Johnson, Kemp and Kotz (2005) pp.8–9 等で議論される．以上により，指数ベータ分布の期待値は，ベータ関数もしくはガンマ関数，ディガンマ関数を用いて，次式として表される：

$$E(X) = -\frac{B_\alpha(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \psi(\alpha + \beta) - \psi(\alpha).$$

これは，McDonald and Xu (1995a, 1995b) や Nadarajah and Kotz (2006) の結果と整合的である．

次に，任意の自然数 k に対して指数ベータ分布の k 次モーメント $E(X^k) = (-1)^k \times E([\log Z]^k)$ を以上と同様な方法で求めよう．即ち，

$$E\left([\log Z]^k\right) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (\log z)^k z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz$$

に注意して，ベータ関数 $B(\alpha,\beta)$ の α に関する k 次偏導関数について

$$B_\alpha^{(k)}(\alpha,\beta) := \frac{\partial^k}{\partial \alpha^k} B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (\log z)^k z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} dz$$

ならば，

$$E([\log Z]^k) = \frac{B_\alpha^{(k)}(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$$

となるので，指数ベータ分布の k 次モーメントは次式と得られる：

$$E(X^k) = (-1)^k \times \frac{B_\alpha^{(k)}(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}.$$

3.2　$\delta \neq 1$ の場合：一般化指数ベータ分布

既に論じたように，(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 $f_1(y|\alpha,\beta,\delta)$ は，$\beta = 1$ の場合，δ を形状母数，$\sigma := 1/\alpha^{\frac{1}{\delta}}$ を尺度母数とする Weibull 分布の密度関数 (6) 式に帰着する．実際，$\beta = 1$ の場合，一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 の導関数 (10) 式は次のように簡単化される：

$$f_1'(y) = \frac{f_1(y)}{y}[(\delta - 1) - \alpha\delta y^\delta].$$

$\beta = 1$ の場合（Weibull 分布）の母数と密度の形状の関係については鍵原（2018）を参照されたい．

以下では，$\delta \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合について議論する．この時，一般化指数ベータ分布の密度関数 f_1 の導関数 (10) 式については，$\delta > 0$ であるこ

とと任意の $y \in (0,\infty)$ に対して $f_1(y) > 0$ であることに注意すると，次の同値関係が成り立つと分かる：

$$f_1'(y) \lesseqgtr 0 \iff \left(1-\frac{1}{\delta}\right)+\frac{y^\delta}{1-e^{-y^\delta}}\left[(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha\right] \lesseqgtr 0.$$

さて，$y \in (0,\infty)$ に対して $y^\delta > 0,\ e^{-y^\delta} \in (0,1)$ であることに注意すると，$1-1/\delta$ と $(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha$ とが同符号であるならば，導関数 $f_1'(y)$ の符号も定まることが分かる．即ち，$1-1/\delta < 0$ かつ $(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha < 0$ であれば $f_1'(y) < 0$ であり，$1-1/\delta > 0$ かつ $(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha > 0$ であれば $f_1'(y) > 0$ である．ここで，同値関係

$$1-\frac{1}{\delta} \lesseqgtr 0 \iff \delta \lesseqgtr 1$$

が成立することは明らかである．また，第 3.1 節の議論により，

$$(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha < 0 \iff \Big[\beta \leq 1\Big] \text{または} \left[\beta > 1 \text{かつ} y^\delta > \log\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\right]$$

であり，

$$(\alpha+\beta-1)e^{-y^\delta}-\alpha > 0 \iff \beta > 1 \text{かつ} y^\delta < \log\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)$$

であることが分かる．

(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 $f_1(y|\alpha,\beta,\delta)$ のグラフは，$\alpha = 1$ とした上で，$\delta = 1/2,\ 2$ の場合と $\beta = 1/2,\ 1,\ 2$ の場合について補論 B で図示される．なお，$\delta = 1$ の場合は指数ベータ分布に帰着することに注意する（補論 A 参照）

3.3　位置尺度分布族

本節では，指数ベータ分布の位置尺度分布族の密度関数のグラフの形状について考察する．その際，指数ベータ分布の密度関数について，(3) 式で定義される標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha,\beta),\ 0 < y < \infty$ と (8) 式で定義される

その位置尺度分布族の密度関数 $f(w|\alpha,\beta,1,\mu,\sigma)$，$\mu < w < \infty$ との間に以下の関係式が成立することに注意する．但し，以下では，母数を特に明示する必要がない場合，$f_0(x) := f_0(x|\alpha,\beta)$，$f(w) := f(w|\alpha,\beta,1,\mu,\sigma)$ と略記する．

$$f(w) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right).$$

これにより，それらの 1 階導関数については

$$f'(w) = \frac{1}{\sigma^2} f_0'\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right)$$

なる関係が成立し，そして，$\sigma^2 > 0$ に注意すると，次の同値関係を得る：

$$f'(w) \lesseqgtr 0 \iff f_0'\left(\frac{w-\mu}{\sigma}\right) \lesseqgtr 0.$$

以上により，指数ベータ分布の標準型の密度関数 f_0 のグラフ $\{(x, f_0(x|\alpha,\beta))|\ x \in (0,\infty)\}$ の形状が判明すれば，その独立変数 x の値を $w = \sigma x + \mu$ と置き換えた上で関数値 $f_0(x)$ を $1/\sigma$ 倍することによって，指数ベータ分布の位置尺度分布族の密度関数 f のグラフ $\{(w, f(w|\alpha,\beta,1,\mu,\sigma))|\ w \in (\mu,\infty)\}$ の形状も判明すると分かる．

4 結論

有限区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数に対して負の対数変換を施すことによって得られる確率変数の分布は，無限区間 $(0,\infty)$ 上に定義される指数分布であり，その指数分布に従う確率変数を巾変換することによって得られる確率変数の分布は，$(0,\infty)$ 上の Weibull 分布である．

本稿は，この事実を基にして，一様分布を特殊な場合として包含するベータ分布に従う確率変数に対して負の対数変換を施すことによって，指数分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分布族（指数ベータ分布）を構成し，更に，指数ベータ分布に従う確率変数に対して巾変換を施すことによって，Weibull 分布を特殊な場合として包含するより一般的な確率分

布族（一般化指数ベータ分布）を構成した．また，指数一般化ベータ分布やベータ指数分布，ベータ Weibull 分布等の幾つかの分布との関係について言及した．その上で，このようにして構成された指数ベータ分布について，その母数と密度の形状の関係を体系的に検討し，その結果として得られた知見を命題 1 として整理した．なお，一般化指数ベータ分布については，その母数と密度の形状の関係についての体系的な検討は今後の課題として残されている．

参考文献

犬井鉄郎（1962）『特殊函数』岩波書店．

鍵原理人（2018）「一般化ガンマ分布の形状について」『福岡大学経済学論叢』第 63 巻第 1 号，pp.117–150.

杉浦光夫（1980）『解析入門 I』東京大学出版会．

蓑谷千凰彦（2010）『統計分布ハンドブック（増補版）』朝倉書店．

森口・宇田川・一松（1987）『数学公式（新装版，第 3 巻：特殊函数）』岩波書店．

Alexander, C., G.M. Cordeiro, E.M.M. Ortega and J.M. Sarabia (2012) “Generalized beta-generated distributions”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, pp.1880–1897.

Eugene, N., C. Lee and F. Famoye (2002) “Beta-normal distribution and its applications”, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 31, pp.497–512.

Jeffrey, A. (2000) *Handbook of Mathematical Formulas and Integrals, 2nd edition*, Academic Press.

Johnson, N.L., A.W. Kemp and S. Kotz (2005) *Univariate Discrete Distributions, 3rd edition*, John Wiley & Sons.

Johnson, N.L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1995) *Continuous Univariate Distributions, Volume 2, 2nd edition*, John Wiley & Sons.

McDonald, J.B. and Y.J. Xu (1995a) "A generalization of the beta distribution with applications", *Journal of Econometrics*, 66, pp.133–152.

McDonald, J.B. and Y.J. Xu (1995b) "Errata: A generalization of the beta distribution with applications", *Journal of Econometrics*, 69, pp.427–428.

Nadarajah, S. and A. Gupta (2004) "Generalizations and related univariate distributions", In *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*, edited by A.K. Gupta and S. Nadarajah, Marcel Dekker, pp.97–163.

Nadarajah, S. and S. Kotz (2006) "The beta exponential distribution", *Reliability Engineering and System Safety*, 91, pp.689–697.

Rinne, H. (2009) *The Weibull Distribution: A Handbook*, Taylor & Francis Group.

A　指数ベータ分布の密度関数のグラフ

本補論は，(3) 式で定義される指数ベータ分布の密度関数 $f_0(x|\alpha,\beta)$, $x\in(0,\infty)$ のグラフを図示する（横軸：x，縦軸：$f_0(x|\alpha,\beta)$）．

A.1　α を一定とする場合

A.1.1　$\alpha=1/2$ の場合

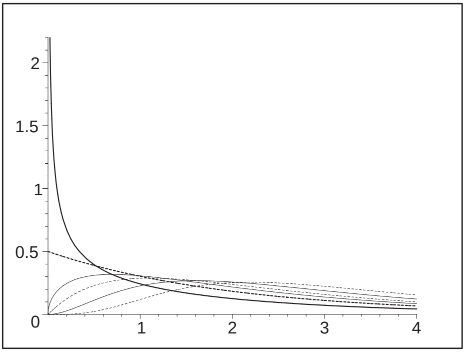

図 1: 指数ベータ分布の密度関数：$\beta=1/2$（太実線），$\beta=1$（太点線，指数分布），$\beta=3/2$（実線），$\beta=2$（点線），$\beta=3$（細実線），$\beta=5$（細点線）

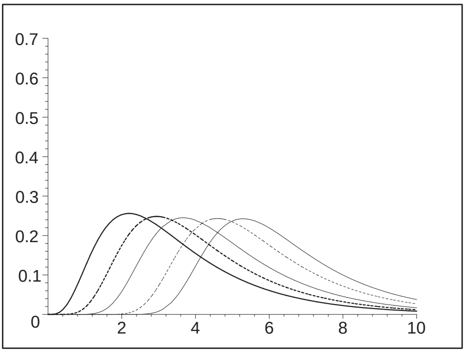

図 2: 指数ベータ分布の密度関数：$\beta=5$（太実線），$\beta=10$（太点線），$\beta=20$（実線），$\beta=50$（点線），$\beta=100$（細実線）

A.1.2　$\alpha = 1$ の場合

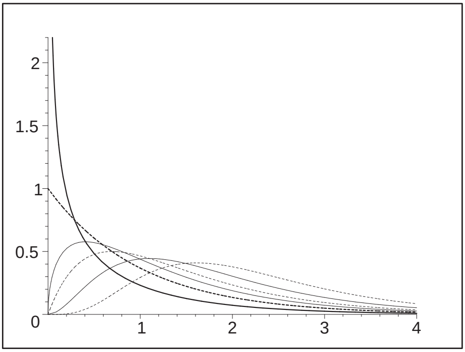

図 3: 指数ベータ分布の密度関数 : $\beta = 1/2$（太実線），$\beta = 1$（太点線，指数分布），$\beta = 3/2$（実線），$\beta = 2$（点線），$\beta = 3$（細実線），$\beta = 5$（細点線）

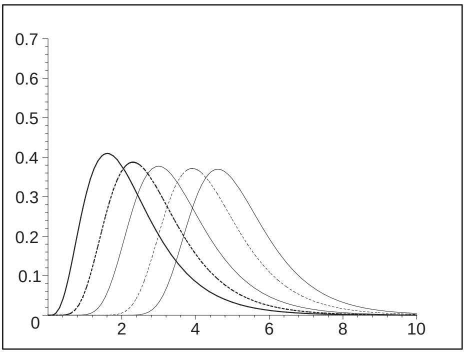

図 4: 指数ベータ分布の密度関数 : $\beta = 5$（太実線），$\beta = 10$（太点線），$\beta = 20$（実線），$\beta = 50$（点線），$\beta = 100$（細実線）

A.1.3　$\alpha = 2$ の場合

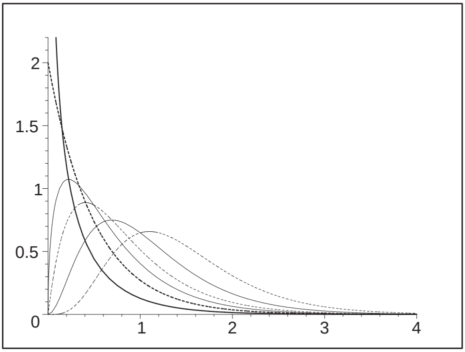

図 5: 指数ベータ分布の密度関数：$\beta = 1/2$（太実線），$\beta = 1$（太点線，指数分布），$\beta = 3/2$（実線），$\beta = 2$（点線），$\beta = 3$（細実線），$\beta = 5$（細点線）

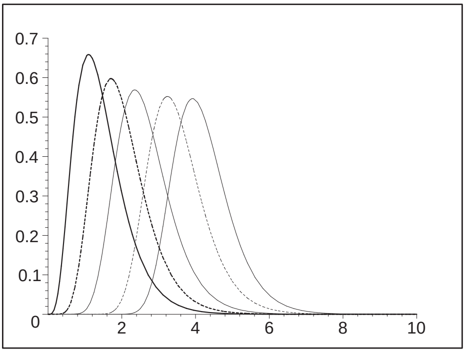

図 6: 指数ベータ分布の密度関数：$\beta = 5$（太実線），$\beta = 10$（太点線），$\beta = 20$（実線），$\beta = 50$（点線），$\beta = 100$（細実線）

A.2　β を一定とする場合

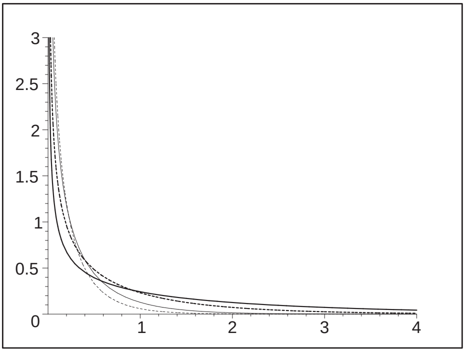

図 7: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 1/2$ の場合）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

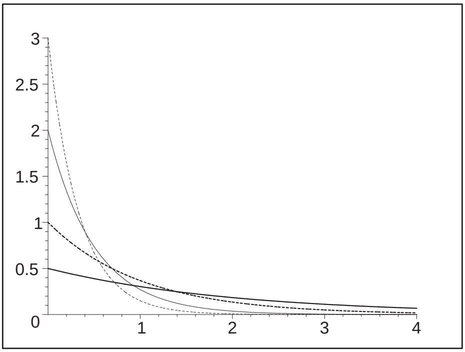

図 8: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 1$ の場合，指数分布）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

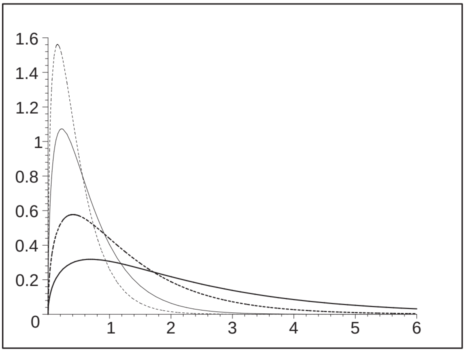

図 9: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 3/2$ の場合）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

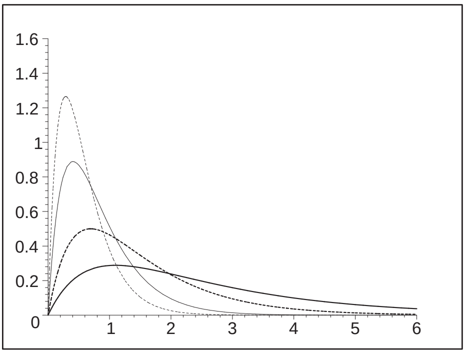

図 10: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 2$ の場合）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

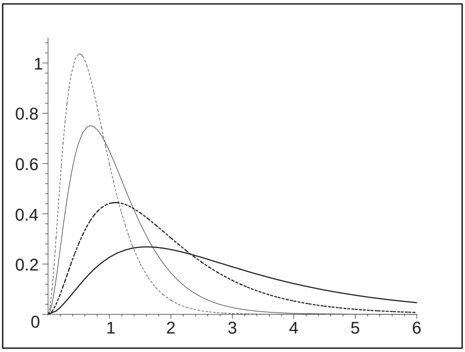

図 11: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 3$ の場合）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

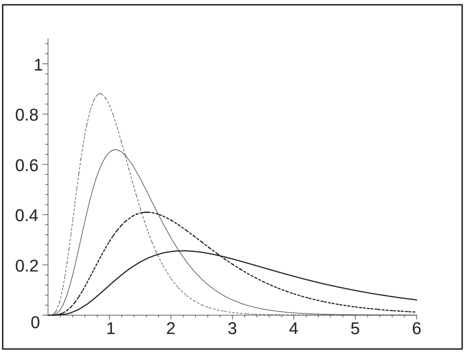

図 12: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 5$ の場合）: $\alpha = 1/2$（太実線），$\alpha = 1$（太点線），$\alpha = 2$（実線），$\alpha = 3$（点線）

B　一般化指数ベータ分布の密度関数のグラフ

本補論は，(5) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 $f_1(y|\alpha, \beta, \delta)$, $y \in (0, \infty)$ のグラフを $\alpha = 1$ として図示する（横軸：y，縦軸：$f_1(y|1, \beta, \delta)$）．なお，$\delta = 1$ の時は指数ベータ分布に帰着する（補論 A 参照）．

B.1　δ を一定とする場合

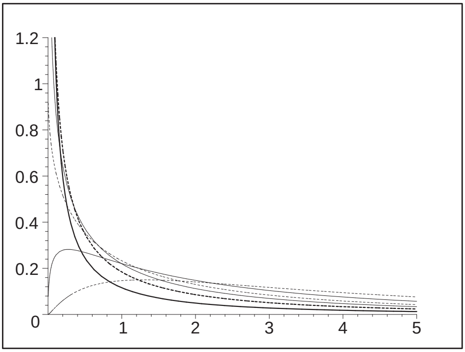

図 13: 指数ベータ分布の密度関数（$\delta = 1/2$ の場合）：$\beta = 1/2$（太実線），$\beta = 1$（太点線，Weibull 分布），$\beta = 3/2$（実線），$\beta = 2$（点線），$\beta = 3$（細実線），$\beta = 5$（細点線）

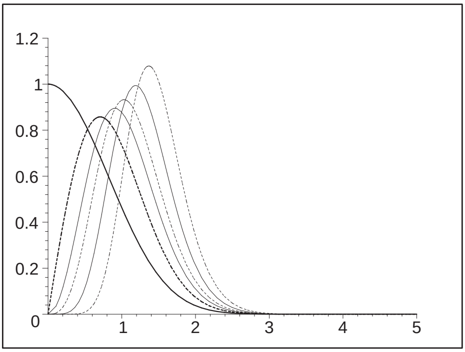

図 14: 指数ベータ分布の密度関数（$\delta = 2$ の場合）：$\beta = 1/2$（太実線），$\beta = 1$（太点線，Weibull 分布），$\beta = 3/2$（実線），$\beta = 2$（点線），$\beta = 3$（細実線），$\beta = 5$（細点線）

B.2　β を一定とする場合

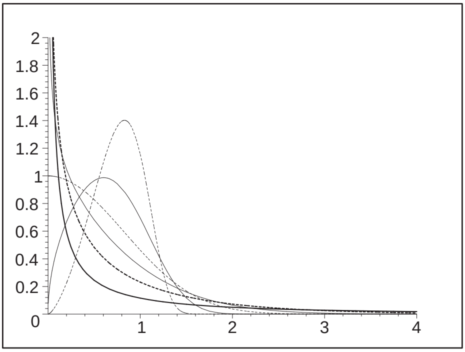

図 15: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 1/2$ の場合）: $\delta = 1/2$（太実線），$\delta = 1$（太点線，指数ベータ分布），$\delta = 3/2$（実線），$\delta = 2$（点線），$\delta = 3$（細実線），$\delta = 5$（細点線）

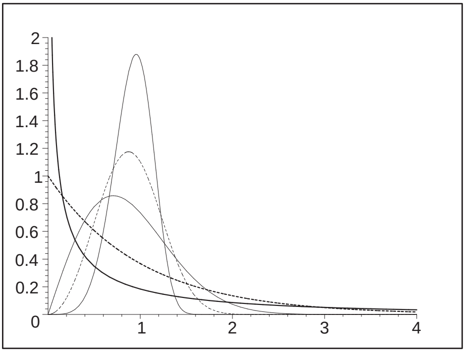

図 16: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 1$ の場合，Weibull 分布）: $\delta = 1/2$（太実線），$\delta = 1$（太点線，指数ベータ分布），$\delta = 3/2$（実線），$\delta = 2$（点線），$\delta = 3$（細実線），$\delta = 5$（細点線）

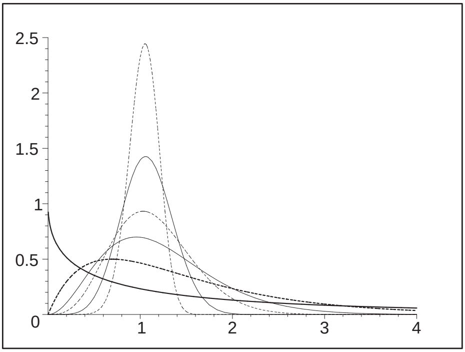

図 17: 指数ベータ分布の密度関数（$\beta = 2$ の場合）: $\delta = 1/2$（太実線），$\delta = 1$（太点線，指数ベータ分布），$\delta = 3/2$（実線），$\delta = 2$（点線），$\delta = 3$（細実線），$\delta = 5$（細点線）