

一般化ガンマ分布の形状について

鍵 原 理 人*

1 序論

通常のカンマ分布は、無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される連続型の確率分布であり、形状母数と尺度母数の 2 つの母数を持つ。カンマ分布は、その特殊な場合として、指数分布やカイ 2 乗分布を包含する。また、カンマ分布に従う確率変数を巾変換することによって得られる確率分布を一般化カンマ分布といい、その特殊な場合として、カンマ分布の他に Weibull 分布を包含する。

一般化カンマ分布は、蓑谷 (2010) や Stacy (1962), Johnson and Kotz (1972), Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994), Khodabin and Ahmadabadi (2010), Forbes, Evans, Hastings and Peacock (2011) 等で考察されている。しかし、一般化カンマ分布の母数と形状の関係に関する体系的な言及は、Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994) において僅かに見られる程度である。そして、Johnson, Kotz and Balakrishnan (1994, p.389) においても、本稿の (11) 式で定義される一般化カンマ分布について、その分布の形状は $\gamma\alpha > 1$ ならば釣鐘型であり、そうでなければ逆 J 字型であると言及されるのみである。本稿は、より詳細な形で、一般化カンマ分布の密度関数のグラフの形状がその母数に応じてどのように変化するかを検討し、その結果として得られた知見を整理する (命題 1, 命題 2 参照)。

*福岡大学経済学部, E-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

本稿は以下のように構成される．先ず，第 2 節において，ガンマ関数を正規化定数として標準ガンマ分布を構成した上で，標準ガンマ分布に従う確率変数を巾変換することによって一般化ガンマ分布を導入する．更に，一般化ガンマ分布に従う確率変数を 1 次変換することによってその位置尺度分布族を構成する．次に，第 3 節において，一般化ガンマ分布の密度関数のグラフの形状がその母数に応じてどのように変化するかを検討し，その結果として得られた知見を命題 1，命題 2 として整理する．また，一般化ガンマ分布の特殊な場合として，ガンマ分布と Weibull 分布の密度関数についても同様の考察を行う（系 1，系 2 参照）．以上の検討の過程で得られる密度関数の増減表は全て補論 A に提示し，密度関数のグラフは全て補論 B に提示する．最後に，第 4 節で結論を述べる．

2 一般化ガンマ分布とその位置尺度分布族

実数 α , x に対して， x の関数 $g(x) := x^{\alpha-1}e^{-x}$ を考える．ここで，等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する．さて， $\alpha > 1$ に対して $g(0) = 0$ ， $\alpha = 1$ に対して $g(0) = 1$ ， $\alpha < 1$ に対して $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} \infty$ であり，また，任意の $\alpha \in (-\infty, \infty)$ に対して $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ であることに注意する．まず， $\alpha \geq 1$ の場合，任意の正の実数 M に対して，関数 $g(x)$ は閉区間 $[0, M]$ で連続なので定積分 $\int_0^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ は存在し，かつ，広義積分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ も存在する（例えば，犬井 1962, p.1 や杉浦 1980, pp.295–296 参照）．次に， $\alpha < 1$ の場合， $0 < \epsilon < M$ なる任意の実数 ϵ に対して，関数 $g(x)$ は閉区間 $[\epsilon, M]$ で連続なので定積分 $\int_\epsilon^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ は存在する．ここで，更に， $\alpha > 0$ であるならば，広義積分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} \int_\epsilon^M x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ は存在する（犬井 1962, p.1, 杉浦 1980, pp.295–296 参照）．従って，任意の $\alpha > 0$ に対して，積分 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ が定義される．この積分を正の実数 α の関数と見做したものをガンマ関数といい， $\Gamma(\alpha)$ と表記する：

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

任意の正の実数 $x \in (0, \infty)$ に対して $x^{\alpha-1}e^{-x} > 0$ であるので、任意の $\alpha > 0$ に対して、ガンマ関数は常に正値を取る。即ち、任意の正の実数 $\alpha > 0$ に対して $\Gamma(\alpha) > 0$ である。

以下、第 2.1 節において、ガンマ関数を正規化定数として標準ガンマ分布を構成した上で、標準ガンマ分布に従う確率変数を巾変換することによって一般化ガンマ分布を導入する。続いて、第 2.2 節において、一般化ガンマ分布に従う確率変数を 1 次変換することによってその位置尺度分布族を構成する。

2.1 標準ガンマ分布と一般化ガンマ分布

ガンマ分布とは、ガンマ関数を正規化定数として構成される確率分布である。即ち、以下で定義される密度関数 $f_* : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ を持つ確率分布をガンマ分布（特に、標準ガンマ分布）といい、 α を形状母数という（ $\alpha > 0$ ）：

$$f_*(z|\alpha) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-z}, \quad z > 0. \quad (2)$$

実際、任意の正の実数 $\alpha, z > 0$ に対して、 $z^{\alpha-1}e^{-z} > 0$ にして $\Gamma(\alpha) > 0$ であることに注意すると、 $f_*(z|\alpha) > 0$ を得る。また、ガンマ関数の定義に注意すると、 $\int_0^\infty f_*(z|\alpha) dz = 1$ を得る。よって、関数 f_* は、非負値性と正規化条件を満たすので、確かに密度関数である。

さて、 Z を標準ガンマ分布に従う確率変数 $Z \sim f_*$ として、正の実数 β に対して Z を巾変換する。即ち、 $X := Z^\beta$, $\beta > 0$ とする。この時、 X の確率分布を一般化ガンマ分布といい、 β は α と同じく形状母数と呼ばれる。ここで、 $0 < Z < \infty$, $\beta > 0$ により $0 < X < \infty$ 注意すると、 X の分布関数 F_0 は、その定義により、 $0 < x < \infty$ なる x に対して、

$$F_0(x) := P(X \leq x) = P\left(Z \leq x^{\frac{1}{\beta}}\right) = \int_0^{x^{\frac{1}{\beta}}} f_*(z|\alpha) dz$$

として表され、その密度関数 f_0 は F_0 の導関数として得られる：

$$f_0(x|\alpha, \beta) = \frac{d}{dx} F_0(x) = \frac{1}{\beta} f_*(x^{\frac{1}{\beta}}|\alpha) x^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

従って、 $0 < x < \infty$ なる x に対して、 X の密度関数 f_0 は次式となる ($0 < \alpha, \beta < \infty$)：

$$f_0(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} x^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-x^{\frac{1}{\beta}}}. \quad (3)$$

$\gamma := 1/\beta$ なる母数変換を施すと、 $X := Z^\beta = Z^{1/\gamma}$ の密度関数 f_0 の別表現が得られる ($0 < \alpha, \gamma < \infty$)：

$$f_0(x|\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} x^{\gamma\alpha-1} e^{-x^\gamma}, \quad 0 < x < \infty. \quad (4)$$

以上のように、(3) 式もしくは (4) 式で定義された密度関数 f_0 を持つ確率分布を一般化ガンマ分布（特に、一般化ガンマ分布の標準型）といい、 α と β （もしくは γ ）を形状母数という。以下においては、特に断らない限り、一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 としては (4) 式の表現を用いる。

さて、 $\gamma = 1$ ($\iff \beta = 1$) の場合、一般化ガンマ分布の密度関数は標準ガンマ分布の密度関数に帰着する：

$$f_0(x|\alpha, 1) = f_*(x|\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad 0 < x < \infty. \quad (5)$$

また、 $\alpha = 1$ の場合、 $\Gamma(1) = 1$ に注意すると、一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 は標準 Weibull 分布の密度関数に帰着する：

$$f_0(x|1, \gamma) = \gamma x^{\gamma-1} e^{-x^\gamma}, \quad 0 < x < \infty. \quad (6)$$

更に、 $\alpha = \gamma = 1$ の場合、一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 は標準指数分布の密度関数に帰着する：

$$f_0(x|1, 1) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty. \quad (7)$$

以上により、一般化ガンマ分布の2つの形状母数 α と γ （もしくは β ）について、 α はガンマ分布の形状母数、 γ （もしくは β ）は Weibull 分布の形状母数に対応すると分かる。

最後に、(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型に従う確率変数 X の基本的な特性値として、その期待値と分散は次のように求まる：

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \quad V(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 2/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} - \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \right]^2. \quad (8)$$

実際、任意の正の実数 k に対して、 X の k 次モーメントは、

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^\infty x^k f_0(x|\alpha, \gamma) dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha + k/\gamma)} x^{\gamma(\alpha + k/\gamma) - 1} e^{-x^\gamma} dx = \frac{\Gamma(\alpha + k/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

と求められる．ここで、最後の等式は、その左辺の被積分関数が (4) 式で定義される一般化ガンマ分布の密度関数になっていること、つまり、

$$f_0(x|\alpha + k/\gamma, \gamma) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha + k/\gamma)} x^{\gamma(\alpha + k/\gamma) - 1} e^{-x^\gamma}$$

であることに注意すると、密度関数の正規化条件によって成立することが分かる．なお、分散公式 $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ に注意する．

さて、一般化ガンマ分布の標準型の期待値と分散 (8) 式は、 $\gamma = 1$ の場合、つまり、標準ガンマ分布 (5) 式の場合、 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ に注意すると、次のように簡単化される：

$$E(X) = \alpha, \quad V(X) = \alpha. \quad (9)$$

また、 $\alpha = 1$ の場合、つまり、標準 Weibull 分布 (6) 式の場合、 $\Gamma(1) = 1$ に注意すると、次となる：

$$E(X) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad V(X) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^2. \quad (10)$$

2.2 一般化ガンマ分布の位置尺度分布族

本節は、(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型に位置母数と尺度母数を導入する． X を一般化ガンマ分布の標準型に従う確率変数 $X \sim f_0$

として、実数 μ と正の実数 σ に対して Z を 1 次変換する。即ち、 $Y := \mu + \sigma X$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ とする。この時、 Y の確率分布を μ を位置母数、 σ を尺度母数とする一般化ガンマ分布の位置尺度分布族という。その分布関数 F は、その定義により、 $y > \mu$ なる y に対して、

$$F(y) := P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = \int_0^{\frac{y - \mu}{\sigma}} f_0(x|\alpha, \gamma) dx$$

であり、その密度関数 f は F の導関数として導出される：

$$f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) = \frac{d}{dy} F(y) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{y - \mu}{\sigma} \middle| \alpha, \gamma\right).$$

従って、 $y > \mu$ なる y に対して、 Y の密度関数 f は次式として得られる：

$$f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) = \frac{\gamma}{\sigma \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^{\gamma\alpha - 1} e^{-\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^\gamma}. \quad (11)$$

ここで、位置母数 μ は任意の実数でよいのに対して、尺度母数 σ と 2 つの形状母数 α と γ は正値であることに注意する： $\mu \in (-\infty, \infty)$, $\sigma, \alpha, \gamma \in (0, \infty)$. $\mu = 0$, $\sigma = 1$ の場合、一般化ガンマ分布の位置尺度分布族は一般化ガンマ分布の標準型 (4) 式に帰着する： $f(y|\alpha, \gamma, 0, 1) = f_0(y|\alpha, \gamma)$, $y > \mu = 0$.

さて、第 2.1 節で指摘した通り、(11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族において、2 つの形状母数 α と γ はそれぞれガンマ分布と Weibull 分布の形状母数に対応する。

先ず、 $\gamma = 1$ の場合、(11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f は標準ガンマ分布 (5) 式の位置尺度分布族の密度関数に帰着する ($y > \mu$):

$$f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^{\alpha - 1} e^{-\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)}. \quad (12)$$

更に、任意の正の実数 n に対して ($0 < n < \infty$)、 $\alpha = n/2$, $\sigma = 2$, $\mu = 0$ であるならば、自由度 n のカイ 2 乗分布の密度関数に帰着する ($y > 0$):

$$f(y|n/2, 1, 0, 2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{y}{2}}.$$

ここで、自由度 n のカイ 2 乗分布は、必ずしもその自由度を自然数に限る必要はなく、任意の正の実数 n に対して定義され得ることに注意する。

次に、 $\alpha = 1$ の場合、一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f は標準 Weibull 分布 (6) 式の位置尺度分布族の密度関数に帰着する ($y > \mu$) :

$$f(y|1, \gamma, \mu, \sigma) = \frac{\gamma}{\sigma} \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^\gamma}. \quad (13)$$

また、 $\alpha = \gamma = 1$ の場合、一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f は標準指数分布 (7) 式の位置尺度分布族の密度関数に帰着する ($y > \mu$) :

$$f(y|1, 1, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y-\mu}{\sigma}}. \quad (14)$$

最後に、一般化ガンマ分布の位置尺度分布族 (11) 式に従う確率変数 Y の期待値と分散は、 $Y := \mu + \sigma X$, $X \sim f_0$ に注意すると、(8) 式により

$$E(Y) = \mu + \sigma \frac{\Gamma(\alpha + 1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, \quad V(Y) = \sigma^2 \left\{ \frac{\Gamma(\alpha + 2/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} - \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1/\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \right]^2 \right\}$$

と求まり、これは、 $\gamma = 1$ の場合、つまり、標準ガンマ分布の位置尺度分布族 (12) 式の場合、

$$E(Y) = \mu + \sigma\alpha, \quad V(Y) = \sigma^2\alpha$$

と簡単化され、 $\alpha = 1$ の場合、つまり、標準 Weibull 分布の位置尺度分布族 (13) 式の場合、次となる：

$$E(Y) = \mu + \sigma\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad V(Y) = \sigma^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \right]^2 \right\}.$$

3 一般化ガンマ分布の形状

本節では、一般化ガンマ分布の密度関数のグラフの形状について考察する。その際、一般化ガンマ分布の密度関数について、(4) 式で定義される標

標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$, $0 < x < \infty$ と (11) 式で定義されるその位置尺度分布族の密度関数 $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$, $\mu < y < \infty$ との間に以下の関係式が成立することに注意する. 但し, 以下では, 母数を特に明示する必要がない場合, $f_0(x) := f_0(x|\alpha, \gamma)$, $f(y) := f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$ と略記する.

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right).$$

これにより, それらの 1 階導関数については

$$f'(y) = \frac{1}{\sigma^2} f'_0\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

なる関係が成立し, そして, $\sigma^2 > 0$ に注意すると, 次の同値関係を得る:

$$f'(y) \leq 0 \iff f'_0\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \leq 0.$$

よって, 一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 $f_0(x)$ のグラフ $\{(x, f_0(x)) | x \in (0, \infty)\}$ の形状が判明すれば, その独立変数 x の値を $y = \sigma x + \mu$ と置き換えた上で関数値 $f_0(x)$ を $1/\sigma$ 倍することによって, 一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 $f(y)$ のグラフ $\{(y, f(y)) | y \in (\mu, \infty)\}$ の形状も判明すると分かる.

従って, 以下では, (4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 f_0 のグラフの形状がその形状母数 α と γ に応じてどのように変化するかを検討した上で, その位置尺度分布族の密度関数 f のグラフの形状がその位置母数 μ と尺度母数 σ に応じてどのように変化するかについて検討を加える. その際, 第 3.1 節で一般の場合について議論した後, 第 3.2 節で幾つかの特殊な場合について議論する.

3.1 一般の場合: 一般化ガンマ分布

(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 f_0 の 1 階導関数として以下が得られる:

$$f'_0(x) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} [(\gamma\alpha - 1) - \gamma x^\gamma] x^{\gamma\alpha-2} e^{-x^\gamma}, \quad x > 0.$$

任意の $\alpha, \gamma > 0$ と $x > 0$ に対して, $\gamma x^{\gamma\alpha-2} e^{-x^\gamma} / \Gamma(\alpha) > 0$ であるので,

$$f'_0(x) \leq 0 \iff (\gamma\alpha - 1) - \gamma x^\gamma \leq 0$$

であると分かる. 以下において, $\gamma\alpha - 1 \leq 0$ の場合と $\gamma\alpha - 1 > 0$ の場合とに大別して議論する.

第一に, $\gamma\alpha - 1 \leq 0 \iff \gamma\alpha \leq 1$ の場合, 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $\gamma x^\gamma > 0$ であることに注意すると, $(\gamma\alpha - 1) - \gamma x^\gamma < 0$ を得る. よって,

$$(\gamma\alpha - 1) - \gamma x^\gamma < 0 \iff f'_0(x) < 0$$

により, $\gamma\alpha \leq 1$ の場合, 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ は x の単調減少関数であると分かる. ここで, 更に, $\gamma\alpha < 1$ の場合と $\gamma\alpha = 1$ の場合の 2 つに分けて考える. 先ず, $\gamma\alpha < 1$ の場合について考えると, $x \rightarrow 0$ の時, $x^{\gamma\alpha-1} \rightarrow \infty$, $x^{\gamma\alpha-2} \rightarrow \infty$, $x^\gamma \rightarrow 0$ であり, $x \rightarrow \infty$ の時, $x^{\gamma\alpha-1} \rightarrow 0$, $x^{\gamma\alpha-2} \rightarrow 0$, $x^\gamma \rightarrow \infty$, $x^\gamma = o(e^{x^\gamma})$ であることに注意すると, 以下を得る:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, & f_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \\ f'_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty, & f'_0(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

次に, $\gamma\alpha = 1$ の場合を考えると, 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ とその 1 階導関数 $f'_0(x)$ は次のように単純化される:

$$f_0(x) = \frac{\gamma}{\Gamma(\alpha)} e^{-x^\gamma}, \quad f'_0(x) = -\frac{\gamma^2}{\Gamma(\alpha)} x^{\gamma-1} e^{-x^\gamma}.$$

よって, $\gamma = 1/\alpha$, $\alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$ に注意すると,

$$f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

を得る. 更に, $\gamma < 1$ ならば,

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

であり, $\gamma = 1$ ならば, $\Gamma(1) = 1$ に注意すると,

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

であり, $\gamma > 1$ ならば, 次を得る :

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

以上により, $\gamma\alpha - 1 \leq 0$ の場合, 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ は x の単調減少関数であり, その増減表として $\gamma\alpha - 1 < 0$ の場合には表 1, $\gamma\alpha - 1 = 0$ の場合には表 2 が得られる (補論 A 参照).

第二に, $\gamma\alpha - 1 > 0 \iff \gamma\alpha > 1$ の場合,

$$(\gamma\alpha - 1) - \gamma x^\gamma \leq 0 \iff x \geq \left(\frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} =: x_m$$

により, 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ は, $0 < x < x_m$ なる x に対しては単調増加, $x_m < x < \infty$ なる x に対しては単調減少となり, $x = x_m$ を最大点 (最頻値) とする単峰型の形状である. また, $x \rightarrow 0$ の時に $x^{\gamma\alpha-1} \rightarrow 0$ となり, $x \rightarrow \infty$ の時に $x^{\gamma\alpha-1} \rightarrow \infty$ にして $x^{\gamma\alpha-1} = o(e^{x^\gamma})$ となることに注意すると, 次を得る :

$$f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

1 階導関数 $f'_0(x)$ について同様の考察を繰り返すと, $1 < \gamma\alpha < 2$ の場合に

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

$\gamma\alpha = 2$ の場合に

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

$\gamma\alpha > 2$ の場合に以下を得る :

$$f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

以上により, $\gamma\alpha - 1 > 0$ の場合, 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ の増減表として表 3 が得られる (補論 A 参照).

以上の議論によって, 一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 のグラフの形状について以下の命題を得る.

命題 1 (一般化ガンマ分布の形状: 標準型の場合). (4) 式で定義される一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(x, f_0(x|\alpha, \gamma)) | x \in (0, \infty)\}$ の形状は, 正値の形状母数 α と γ に応じて以下のように定まる ($\alpha, \gamma > 0$). 但し, 以下では $f_0(x) := f(x|\alpha, \gamma)$ と略記する. なお, 図については補論 B を参照されたい.

1. $\gamma\alpha \leq 1$ の場合 (単調減少型)

密度関数 $f_0(x)$ は x の単調減少関数であり, そのグラフは右下りの形状を示す. 特に, $x \rightarrow \infty$ の場合において $f_0(x) \rightarrow 0$ である.

(a) $\gamma\alpha < 1$ の場合 (非有界: 図 1)

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow \infty$ である.

(b) $\gamma\alpha = 1$ の場合 (有界: 図 2)

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow 1/\Gamma(\alpha + 1)$ である¹.

2. $\gamma\alpha > 1$ の場合 (単峰型: 図 3, 図 4)

密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$ は $x = x_m$ を最大点 (最頻値) として, そのグラフは単峰型の形状を示す:

$$x_m = \left(\frac{\gamma\alpha - 1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

また, この場合, $x \rightarrow 0$ もしくは $x \rightarrow \infty$ のいずれの場合においても $f_0(x|\alpha, \gamma) \rightarrow 0$ である².

¹ $x \rightarrow 0$ において密度関数 $f_0(x)$ が $1/\Gamma(\alpha + 1)$ に収束する際, その傾きは, $\gamma < 1 \iff \alpha > 1$ の場合に負の無限大に発散し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$), $\gamma = 1 \iff \alpha = 1$ の場合に定数に収束し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$), $\gamma > 1 \iff \alpha < 1$ の場合に 0 に収束する ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) という形を取る (図 2 参照).

² $x \rightarrow 0$ において密度関数 $f_0(x)$ が 0 に収束する際, その傾きは, $\gamma\alpha < 2$ の場合に無限大に発散し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$), $\gamma\alpha = 2$ の場合に定数に収束し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2/\Gamma(\alpha + 1)$), $\gamma\alpha > 2$ の場合に 0 に収束する ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) という形を取る (図 3, 図 4 参照).

以上において，一般化ガンマ分布の密度関数の形状が2つの形状母数に応じてどのように変化するかが明らかになった．本節の最後に，一般化ガンマ分布の密度関数の形状と位置母数，尺度母数の関係を明らかにしよう．

(11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f において，位置母数 μ がそのグラフを μ だけ左右に平行移動させることは明らかであろう．従って，以下においては，尺度母数と密度関数 f の形状の関係について検討する．

$0 < \sigma < \tau$ として，(11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f が任意の $y \in (\mu, \infty)$ に対して正值であることに注意すると，次の同値関係を得る：

$$f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma) \leq f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau) \iff \frac{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma)}{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau)} \leq 1.$$

また，対数変換が単調変換であることに注意すると，

$$f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma) \leq f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau) \iff \log \frac{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma)}{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau)} \leq 0$$

を得る．さて，

$$\frac{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma)}{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau)} = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{\gamma\alpha} e^{-\frac{\tau^\gamma - \sigma^\gamma}{\sigma^\gamma \tau^\gamma} (y - \mu)^\gamma}$$

により，以下を得る：

$$\begin{aligned} \log \frac{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma)}{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau)} &= \gamma\alpha(\log \tau - \log \sigma) - \frac{\tau^\gamma - \sigma^\gamma}{\sigma^\gamma \tau^\gamma} (y - \mu)^\gamma \leq 0. \\ \iff (y - \mu)^\gamma &\geq \frac{\gamma\alpha\sigma^\gamma\tau^\gamma}{\tau^\gamma - \sigma^\gamma} (\log \tau - \log \sigma). \end{aligned}$$

ここで， $\gamma > 0$ ， $y > \mu$ ， $\gamma\alpha\sigma^\gamma\tau^\gamma(\log \tau - \log \sigma)/(\tau^\gamma - \sigma^\gamma) > 0$ であることに注意し，正の実数に対する正の巾変換が単調変換であることに注意すると，

$$\log \frac{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \sigma)}{f(y | \alpha, \gamma, \mu, \tau)} \leq 0 \iff y - \mu \geq \left[\frac{\gamma\alpha\sigma^\gamma\tau^\gamma}{\tau^\gamma - \sigma^\gamma} (\log \tau - \log \sigma) \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

を得る．以上により，次の同値関係を得る：

$$f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) \leq f(y|\alpha, \gamma, \mu, \tau) \iff y \geq \mu + \left[\frac{\gamma \alpha \sigma^\gamma \tau^\gamma}{\tau^\gamma - \sigma^\gamma} (\log \tau - \log \sigma) \right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

これにより，(11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族において，尺度母数が大きくなる程，その密度関数は右裾が厚くなり，左裾が薄くなることが判明する．

以上の議論によって，一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f のグラフの形状について次の命題を得る．

命題 2 (一般化ガンマ分布の形状:位置尺度分布族の場合). (11) 式で定義される一般化ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 f のグラフ $\{(y, f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)) | y \in (\mu, \infty)\}$ の形状は，4つの母数 $\alpha, \gamma, \mu, \sigma$ に応じて以下のように定まる．但し， $\alpha, \gamma, \sigma \in (0, \infty)$ ， $\mu \in (-\infty, \infty)$ である．図については補論 B を参照されたい．

1. 2つの形状母数 α と γ に応じて，密度関数 $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$ のグラフの形状は，標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$ と同様の形で決定される（命題 1 参照）．但し，独立変数の座標値は $y = \mu + \sigma x$ と変換され，関数値（密度関数の高さ）は $1/\sigma$ 倍されなければならない．
2. 位置母数 μ が大きくなると，密度関数 $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$ のグラフは右に平行移動し，小さくなると左に平行移動する（図 7, 図 8, 図 15, 図 16, 図 20 参照）．
3. 尺度母数 σ が大きくなると，密度関数 $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma)$ のグラフはその右裾が厚くなり，左裾が薄くなる（図 9, 図 10, 図 11, 図 17, 図 18, 図 19, 図 21 参照）．より正確に表現すると， $\sigma < \tau$ である 2つの尺度母数 σ と τ に対して， y が一定の値 $\mu + y_{\sigma\tau}$ より小さい場合には $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) > f(y|\alpha, \gamma, \mu, \tau)$ ，大きい場合には $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) < f(y|\alpha, \gamma, \mu, \tau)$ であり， $y = \mu + y_{\sigma\tau}$ の場合には $f(y|\alpha, \gamma, \mu, \sigma) = f(y|\alpha, \gamma, \mu, \tau)$ である：

$$y_{\sigma\tau} := \left(\frac{\gamma \alpha \sigma^\gamma \tau^\gamma}{\tau^\gamma - \sigma^\gamma} \log \frac{\tau}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

3.2 幾つかの特殊な場合

(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 f_0 は、 $\gamma = 1$ とした場合、(5) 式で見たように標準ガンマ分布の密度関数に帰着し、 $\alpha = 1$ とした場合、(6) 式で見たように標準 Weibull 分布の密度関数に帰着する。本節では、この特殊な場合において、一般化ガンマ分布の密度関数の形状を改めて考察する。なお、その他の特殊な場合として、 $\alpha = 1/2$ の場合と $\alpha = 2$ の場合、 $\gamma = 1/2$ の場合、 $\gamma = 2$ の場合について、一般化ガンマ分布の密度関数のグラフをそれぞれ図 22, 図 23, 図 24, 図 25 に提示する（補論 B 参照）。

3.2.1 $\gamma = 1$ の場合：ガンマ分布

(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 f_0 は、 $\gamma = 1$ とした場合、(5) 式で見たように標準ガンマ分布の密度関数に帰着する。よって、命題 1 の系として以下の結果（系 1）が得られる。実際、 $\gamma = 1$ の場合、一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 は標準ガンマ分布の密度関数に帰着するので、その 1 階導関数は

$$f'_0(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} [(\alpha - 1) - x] x^{\alpha-2} e^{-x}$$

と簡単化され、その増減表は表 4 に与えられる（補論 A 参照）。

系 1 (標準ガンマ分布の形状). (5) 式で定義される標準ガンマ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(x, f_0(x) | \alpha, 1) | x \in (0, \infty)\}$ の形状は、正值の形状母数 $\alpha > 0$ に応じて以下のように定まる（図 5 参照）。但し、以下では $f_0(x) := f_0(x | \alpha, 1)$ と略記する。なお、図については補論 B を参照されたい。

1. $\alpha \leq 1$ の場合（単調減少型）

密度関数 $f_0(x)$ は単調減少関数であり、そのグラフは右下りの形状を示す。特に、 $x \rightarrow \infty$ の場合において $f_0(x) \rightarrow 0$ である。

(a) $\alpha < 1$ の場合（非有界）

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow \infty$ である．

(b) $\alpha = 1$ の場合（有界，標準指数分布）

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow 1$ である．この場合，標準ガンマ分布は標準指数分布に帰着する．

2. $\alpha > 1$ の場合（単峰型）

密度関数 $f_0(x)$ は $x = x_m$ を最大点（最頻値）として，そのグラフは単峰型の形状を示す：

$$x_m = \alpha - 1.$$

また，この場合， $x \rightarrow 0$ もしくは $x \rightarrow \infty$ のいずれの場合においても $f_0(x) \rightarrow 0$ である³．

これにより，形状母数 α が大きくなるにつれて，密度関数の最大点（最頻値）も大きくなり無限大に発散することが分かる：

$$x_m = \alpha - 1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty.$$

なお，密度関数の最大値は $f_0(x_m) = (\alpha - 1)^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)} / \Gamma(\alpha)$ となる．また，標準ガンマ分布 (5) 式の期待値と分散についても (9) 式により $\alpha \rightarrow \infty$ の時に無限大に発散すると分かる：

$$E(X) = V(X) = \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \infty.$$

これらの事実については，図 5 や図 6 から理解される（補論 B 参照）．

さて，標準ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 (12) 式のグラフの形状については，命題 2 において $\gamma = 1$ と置けば，その結論はそのままに成立する．つまり，位置母数 μ と尺度母数 σ が密度関数 (12) 式のグラフの形状に及ぼす影響は命題 2 の結論と全く同じである．よって，位置母数は密

³ $x \rightarrow 0$ において密度関数 $f_0(x)$ が 0 に収束する際，その傾きは， $\alpha < 2$ の場合に無限大に発散し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$)， $\alpha = 2$ の場合に定数に収束し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$)， $\alpha > 2$ の場合に 0 に収束する ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) という形を取る（図 5，図 10，図 11 参照）．

度関数のグラフを左右に平行移動させる (図 7, 図 8, 図 20 参照). また, 尺度母数については, $\sigma < \tau$ である 2 つの尺度母数 σ と τ に対して, y が一定の値 $\mu + y_{\sigma\tau}$ より小さい場合には $f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma) > f(y|\alpha, 1, \mu, \tau)$, 大きい場合には $f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma) < f(y|\alpha, 1, \mu, \tau)$ であり, $y = \mu + y_{\sigma\tau}$ の場合には $f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma) = f(y|\alpha, 1, \mu, \tau)$ である (図 9, 図 10, 図 11, 図 21 参照):

$$y_{\sigma\tau} := \frac{\alpha\sigma\tau}{\tau - \sigma} \log \frac{\tau}{\sigma}.$$

本節の最後に, 標準ガンマ分布の位置尺度分布族の特殊な場合として, 自由度 n のカイ 2 乗分布の形状について言及する. 自由度 n のカイ 2 乗分布とは, 標準ガンマ分布の位置尺度分布族 (12) 式において $\alpha = n/2$, $\sigma = 2$, $\mu = 0$ とした場合に他ならないので, その密度関数のグラフの形状は, 系 1 等により, 自由度が 2 以下であれば単調減少であり, 自由度が 2 より大であれば単峰型であると分かる (図 12 参照).

3.2.2 $\alpha = 1$ の場合 : Weibull 分布

(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 は, $\alpha = 1$ とした場合, (6) 式で見たように標準 Weibull 分布の密度関数に帰着する. よって, 命題 1 の系として以下の結果 (系 2) が得られる. 実際, $\alpha = 1$ の場合, 一般化ガンマ分布の密度関数 f_0 は標準 Weibull 分布の密度関数に帰着するので, その 1 階導関数は

$$f'_0(x) = \gamma[(\gamma - 1) - \gamma x^\gamma]x^{\gamma-2}e^{-x^\gamma}$$

と簡単化され, その増減表は表 5 に与えられる (補論 A 参照).

系 2 (標準 Weibull 分布の形状). (6) 式で定義される標準 Weibull 分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(x, f_0(x|1, \gamma)) | x \in (0, \infty)\}$ の形状は, 正値の形状母数 $\gamma > 0$ に応じて以下のように定まる (図 13 参照). 但し, 以下では $f_0(x) := f_0(x|1, \gamma)$ と略記する. なお, 図については補論 B を参照されたい.

1. $\gamma \leq 1$ の場合（単調減少型）

密度関数 $f_0(x)$ は単調減少関数であり，そのグラフは右下りの形状を示す．特に， $x \rightarrow \infty$ の場合において $f_0(x) \rightarrow 0$ である．

(a) $\gamma < 1$ の場合（非有界）

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow \infty$ である．

(b) $\gamma = 1$ の場合（有界，標準指数分布）

$x \rightarrow 0$ において $f_0(x) \rightarrow 1$ である．この場合，標準 Weibull 分布は標準指数分布に帰着する．

2. $\gamma > 1$ の場合（単峰型）

密度関数 $f_0(x)$ は $x = x_m$ を最大点（最頻値）として，そのグラフは単峰型の形状を示す：

$$x_m = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

また，この場合， $x \rightarrow 0$ もしくは $x \rightarrow \infty$ のいずれの場合においても $f_0(x) \rightarrow 0$ である⁴．

形状母数 γ が大きくなるにつれて，密度関数の最大点（最頻値）は 1 に収束する（例えば，Johnson, Kotz and Balakrishnan 1994, p.630 参照）：

$$x_m = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 1.$$

なお，密度関数の最大値は $f_0(x_m) = \gamma(1 - 1/\gamma)^{1-1/\gamma} e^{-(1-1/\gamma)}$ となる．また，標準 Weibull 分布 (6) 式の期待値と分散については， $\Gamma(1) = 1$ に注意すると，(10) 式により $\gamma \rightarrow \infty$ の時にそれぞれ 1 と 0 に収束すると分かる：

$$E(X) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \Gamma(1) = 1,$$

$$V(X) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{\gamma}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)\right]^2 \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \Gamma(1) - [\Gamma(1)]^2 = 0.$$

⁴ $x \rightarrow 0$ において密度関数 $f_0(x)$ が 0 に収束する際，その傾きは， $\gamma < 2$ の場合に無限大に発散し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$)， $\gamma = 2$ の場合に定数に収束し ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$)， $\gamma > 2$ の場合に 0 に収束する ($f'_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) という形を取る（図 13，図 18，図 19 参照）．

これらの事実については、図 13 や図 14 から理解される（補論 B 参照）。

最後に、標準 Weibull 分布の位置尺度分布族の密度関数 (13) 式のグラフの形状については、命題 2 において $\alpha = 1$ と置けば、その結論はそのままに成立する。つまり、位置母数 μ と尺度母数 σ が密度関数 (13) 式のグラフの形状に及ぼす影響は命題 2 の結論と全く同じである。よって、位置母数は密度関数のグラフを左右に平行移動させる（図 15, 図 16, 図 20 参照）。また、尺度母数については、 $\sigma < \tau$ である 2 つの尺度母数 σ と τ に対して、 y が一定の値 $\mu + y_{\sigma\tau}$ より小さい場合には $f(y|1, \gamma, \mu, \sigma) > f(y|1, \gamma, \mu, \tau)$, 大きい場合には $f(y|1, \gamma, \mu, \sigma) < f(y|1, \gamma, \mu, \tau)$ であり、 $y = \mu + y_{\sigma\tau}$ の場合には $f(y|1, \gamma, \mu, \sigma) = f(y|1, \gamma, \mu, \tau)$ である（図 17, 図 18, 図 19, 図 21 参照）：

$$y_{\sigma\tau} := \left(\frac{\gamma\sigma^\gamma\tau^\gamma}{\tau^\gamma - \sigma^\gamma} \log \frac{\tau}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

4 結論

無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される一般化ガンマ分布は、その特殊な場合として、ガンマ分布を始めとしてカイ 2 乗分布や Weibull 分布、指数分布を包含する。本稿は、その分布の形状を体系的に検討し、その結果として得られた知見を命題 1 や命題 2, 系 1, 系 2 として整理した。即ち、一般化ガンマ分布の密度関数の形状について、命題 1 において 2 つの形状母数との関係を提示し、命題 2 において位置母数と尺度母数との関係を提示した。また、その特殊な場合として、ガンマ分布についての知見を系 1, Weibull 分布についての知見を系 2 として提示した。更に、それらの特殊な場合として、カイ 2 乗分布や指数分布の形状についても言及した。

参考文献

犬井鉄郎（1962）『特殊函数』岩波書店.

杉浦光夫（1980）『解析入門 I』東京大学出版会.

蓑谷千凰彦（2010）『統計分布ハンドブック（増補版）』朝倉書店.

Forbes, C., M. Evans, N. Hastings and B. Peacock (2011) *Statistical Distributions, 4th edition*, John Wiley & Sons.

Johnson, N. L. and S. Kotz (1972) “Power transformations of gamma variables”, *Biometrika*, 59, 226–229.

Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1994) *Continuous Univariate Distributions, Volume 1, 2nd edition*, John Wiley & Sons.

Khodabin, M. and A. Ahmadabadi (2010) “Some properties of generalized gamma distribution”, *Mathematical Sciences*, 4, 9–28.

Stacy, E. W. (1962) “A generalization of the gamma distribution”, *The Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1187–1192.

A 一般化ガンマ分布の密度関数の増減表

本補論は，(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$, $x \in (0, \infty)$ の増減表を提示する．これにより，2つの形状母数 $\alpha, \gamma > 0$ と密度関数 f_0 のグラフの形状との関係が明らかになる（命題 1, 系 1, 系 2）．

A.1 一般の場合：一般化ガンマ分布の標準型

表 1: 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ の増減表 ($\gamma\alpha < 1$ の場合)

x	0	...	∞
f'_0	$-\infty$	-	0
f_0	∞	\searrow	0

表 2: 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ の増減表 ($\gamma\alpha = 1$ の場合) : 左表 ($\gamma < 1 \iff \alpha > 1$ の場合)，中表 ($\gamma = 1 \iff \alpha = 1$ の場合)，右表 ($\gamma > 1 \iff \alpha < 1$ の場合)

x	0	...	∞
f'_0	$-\infty$	-	0
f_0	$1/\Gamma(\alpha+1)$	\searrow	0

x	0	...	∞
f'_0	-1	-	0
f_0	1	\searrow	0

x	0	...	∞
f'_0	0	-	0
f_0	$1/\Gamma(\alpha+1)$	\searrow	0

表 3: 一般化ガンマ分布の密度関数 $f_0(x)$ の増減表 ($\gamma\alpha > 1$ の場合)

x	0	...	$(\alpha - 1/\gamma)^{1/\gamma}$...	∞
f'_0	*	+	0	-	0
f_0	0	\nearrow		\searrow	0

* = ∞ ($\gamma\alpha < 2$ の時)， $2/\Gamma(\alpha+1)$ ($\gamma\alpha = 2$ の時)，0 ($\gamma\alpha > 2$ の時)

A.2 幾つかの特殊な場合

A.2.1 $\gamma = 1$ の場合：標準ガンマ分布

表 4: 標準ガンマ分布の増減表：上段左表 ($\alpha < 1$ の場合)，上段右表 ($\alpha = 1$ の場合，標準指数分布)，下段表 ($\alpha > 1$ の場合)

x	0	...	∞
f'_0	$-\infty$	-	0
f_0	∞	\searrow	0

x	0	...	∞
f'_0	-1	-	0
f_0	1	\searrow	0

x	0	...	$\alpha - 1$...	∞
f'_0	*	+	0	-	0
f_0	0	\nearrow		\searrow	0

* = ∞ ($\alpha < 2$ の時)，1 ($\alpha = 2$ の時)，0 ($\alpha > 2$ の時)

A.2.2 $\alpha = 1$ の場合：標準 Weibull 分布

表 5: 標準 Weibull 分布の増減表：上段左表 ($\gamma < 1$ の場合)，上段右表 ($\gamma = 1$ の場合，標準指数分布)，下段表 ($\gamma > 1$ の場合)

x	0	...	∞
f'_0	$-\infty$	-	0
f_0	∞	\searrow	0

x	0	...	∞
f'_0	-1	-	0
f_0	1	\searrow	0

x	0	...	$(1 - 1/\gamma)^{1/\gamma}$...	∞
f'_0	*	+	0	-	0
f_0	0	\nearrow		\searrow	0

* = ∞ ($\gamma < 2$ の時)，2 ($\gamma = 2$ の時)，0 ($\gamma > 2$ の時)

B 一般化ガンマ分布の密度関数のグラフ

本補論で提示する図は全て Maple 6 によるものである。

B.1 一般の場合：一般化ガンマ分布

本節は、(4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$ のグラフを図示する（横軸： x ，縦軸： $f_0(x|\alpha, \gamma)$ ）。

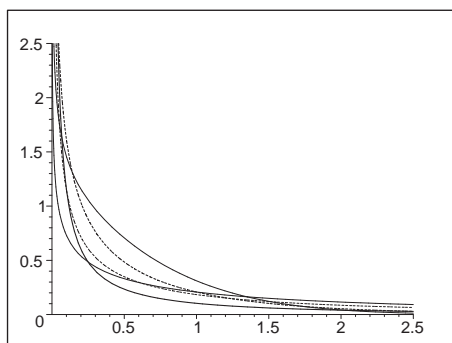


図 1: 一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 ($\alpha\gamma < 1$ の場合): $\alpha = \gamma = 1/2$ (太実線), $\alpha = 1/2, \gamma = 1$ (太点線), $\alpha = 1/2, \gamma = 3/2$ (実線), $\alpha = 1, \gamma = 1/2$ (点線), $\alpha = 3/2, \gamma = 1/2$ (細実線)

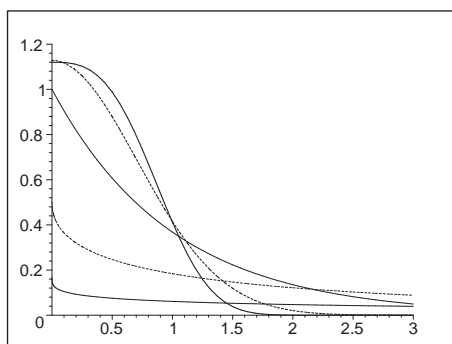


図 2: 一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 ($\alpha\gamma = 1$ の場合): $\alpha = 1/3, \gamma = 3$ (太実線), $\alpha = 1/2, \gamma = 2$ (太点線), $\alpha = \gamma = 1$ (実線), $\alpha = 2, \gamma = 1/2$ (点線), $\alpha = 3, \gamma = 1/3$ (細実線)

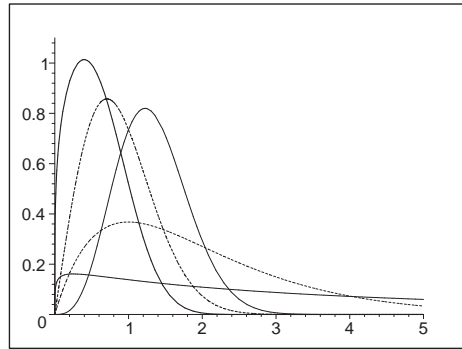


図 3: 一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 ($\alpha\gamma > 1$ の場合): $\alpha = 1/2$, $\gamma = 5/2$ (太実線), $\alpha = 1$, $\gamma = 2$ (太点線), $\alpha = \gamma = 2$ (実線), $\alpha = 2$, $\gamma = 1$ (点線), $\alpha = 5/2$, $\gamma = 1/2$ (細実線)

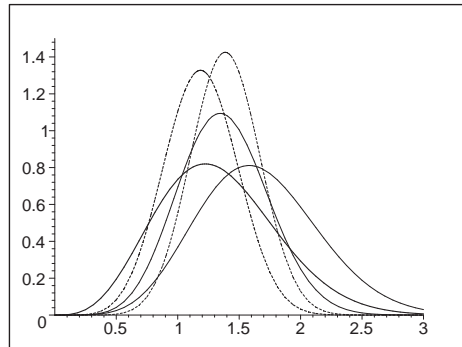


図 4: 一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 ($\alpha\gamma > 1$ の場合): $\alpha = \gamma = 2$ (太実線), $\alpha = 2$, $\gamma = 3$ (太点線), $\alpha = 3$, $\gamma = 2$ (実線), $\alpha = \gamma = 3$ (点線), $\alpha = \gamma = 5/2$ (細実線)

B.2 幾つかの特殊な場合

B.2.1 $\gamma = 1$ の場合：ガンマ分布

本節は、(12) 式で定義される標準ガンマ分布の位置尺度分布族の密度関数 $f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma)$ のグラフを図示する（横軸： y ，縦軸： $f(y|\alpha, 1, \mu, \sigma)$ ）。

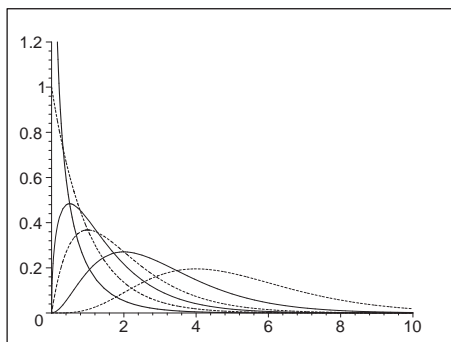


図 5: ガンマ分布の密度関数 ($\mu = 0, \sigma = 1$): $\alpha = 1/2$ (太実線), $\alpha = 1$ (太点線, 指数分布), $\alpha = 3/2$ (実線), $\alpha = 2$ (点線), $\alpha = 3$ (細実線), $\alpha = 5$ (細点線)

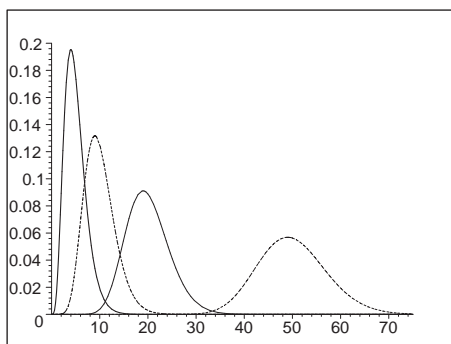


図 6: ガンマ分布の密度関数 ($\mu = 0, \sigma = 1$): $\alpha = 5$ (実線), $\alpha = 10$ (点線), $\alpha = 20$ (細実線), $\alpha = 50$ (細点線)

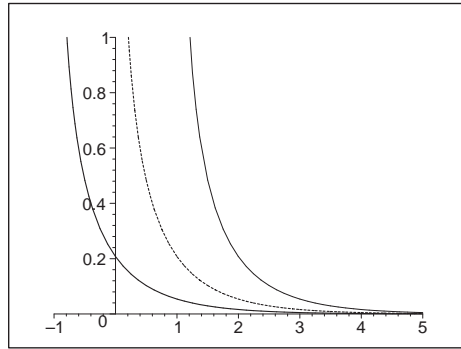


図 7: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 1/2$, $\sigma = 1$): $\mu = -1$ (実線), $\mu = 0$ (点線), $\mu = 1$ (細実線)

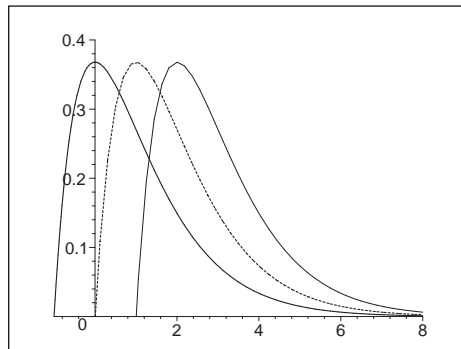


図 8: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 2$, $\sigma = 1$): $\mu = -1$ (実線), $\mu = 0$ (点線), $\mu = 1$ (細実線)

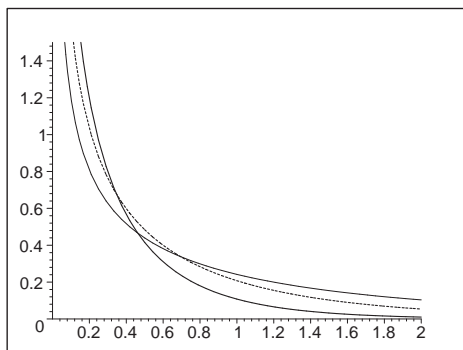


図 9: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 1/2$, $\mu = 0$): $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

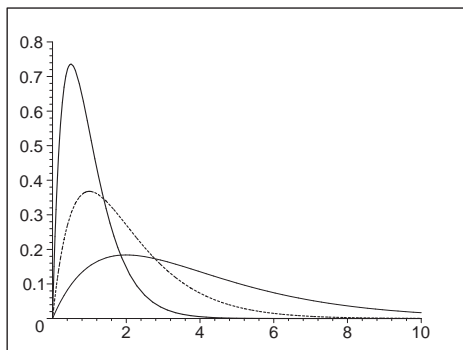


図 10: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 2$, $\mu = 0$): $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

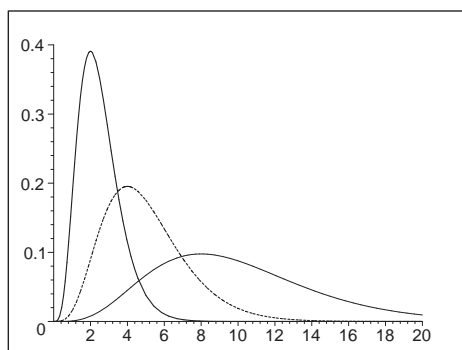


図 11: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 5$, $\mu = 0$): $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

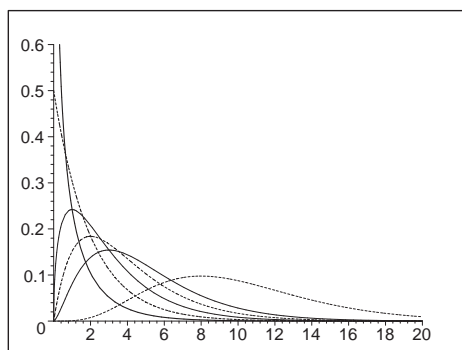


図 12: ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = n/2$, $\mu = 0$, $\sigma = 2$, 自由度 n のカイ 2 乗分布): $n = 1$ (太実線), $n = 2$ (太点線), $n = 3$ (実線), $n = 4$ (点線), $n = 5$ (細実線), $n = 10$ (細点線)

B.2.2 $\alpha = 1$ の場合 : Weibull 分布

本節は, (13) 式で定義される標準 Weibull 分布の位置尺度分布族の密度関数 $f(y|1, \gamma, \mu, \sigma)$ のグラフを図示する (横軸 : y , 縦軸 : $f(y|1, \gamma, \mu, \sigma)$).

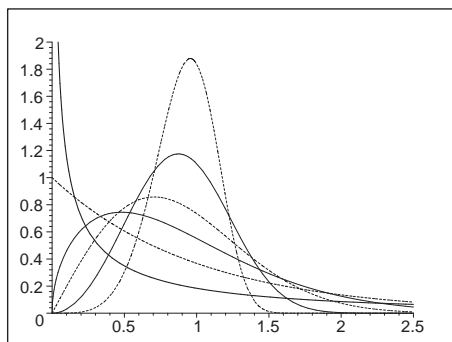


図 13: Weibull 分布の密度関数 ($\mu = 0, \sigma = 1$) : $\gamma = 1/2$ (太実線), $\gamma = 1$ (太点線, 指数分布), $\gamma = 3/2$ (実線), $\gamma = 2$ (点線), $\gamma = 3$ (細実線), $\gamma = 5$ (細点線)

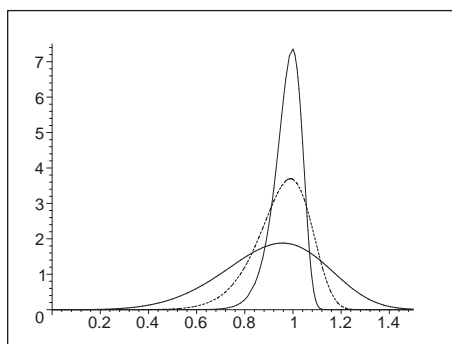


図 14: Weibull 分布の密度関数 ($\mu = 0, \sigma = 1$) : $\gamma = 5$ (実線), $\gamma = 10$ (点線), $\gamma = 20$ (細実線)

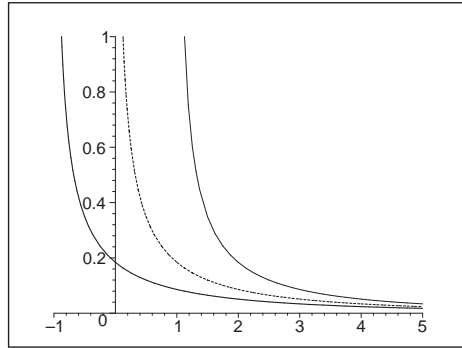


図 15: Weibull 分布の密度関数 ($\gamma = 1/2$, $\sigma = 1$): $\mu = -1$ (実線), $\mu = 0$ (点線), $\mu = 1$ (細実線)

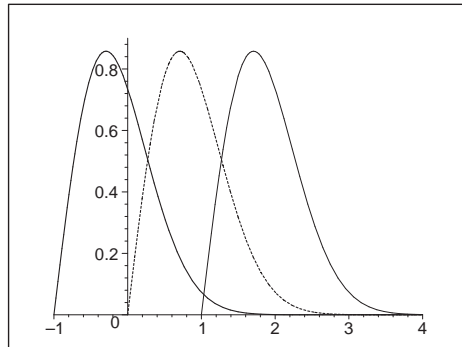


図 16: Weibull 分布の密度関数 ($\gamma = 2$, $\sigma = 1$): $\mu = -1$ (実線), $\mu = 0$ (点線), $\mu = 1$ (細実線)

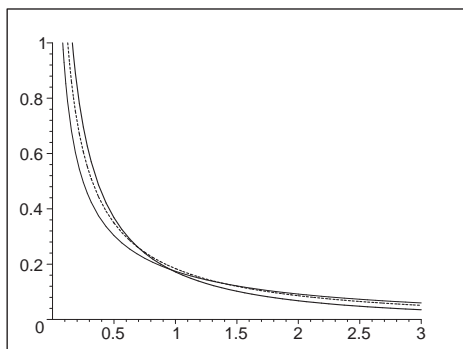


図 17: Weibull 分布の密度関数 ($\gamma = 1/2$, $\mu = 0$) : $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

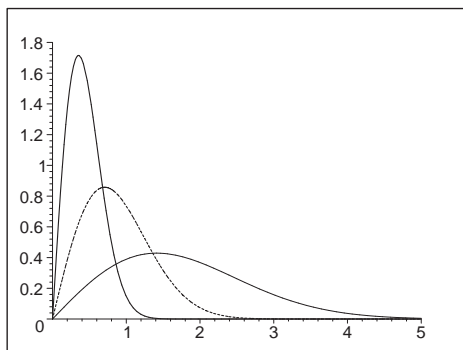


図 18: Weibull 分布の密度関数 ($\gamma = 2$, $\mu = 0$) : $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

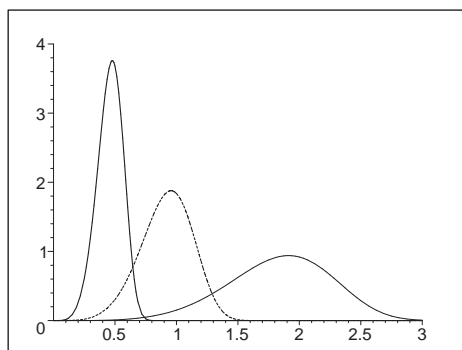


図 19: Weibull 分布の密度関数 ($\gamma = 5$, $\mu = 0$) : $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

B.2.3 $\alpha = \gamma = 1$ の場合 : 指数分布

本節は, (14) 式で定義される標準指数分布の位置尺度分布族の密度関数 $f(y|1, 1, \mu, \sigma)$ のグラフを図示する (横軸 : y , 縦軸 : $f(y|1, 1, \mu, \sigma)$).

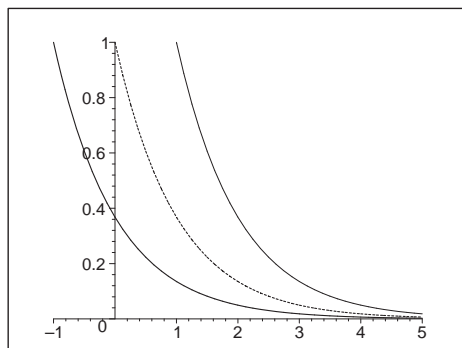


図 20: 指数分布の密度関数 ($\sigma = 1$) : $\mu = -1$ (実線), $\mu = 0$ (点線), $\mu = 1$ (細実線)

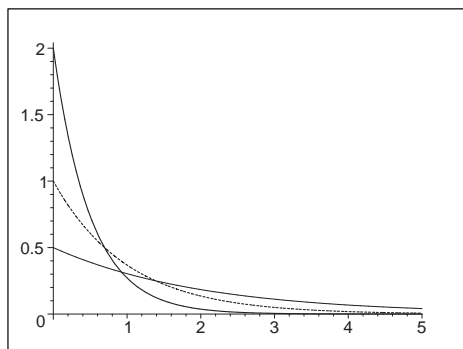


図 21: 指数分布の密度関数 ($\mu = 0$): $\sigma = 1/2$ (実線), $\sigma = 1$ (点線), $\sigma = 2$ (細実線)

B.2.4 その他の場合

本節は, (4) 式で定義される一般化ガンマ分布の標準型の密度関数 $f_0(x|\alpha, \gamma)$ のグラフを図示する (横軸: x , 縦軸: $f_0(x|\alpha, \gamma)$).

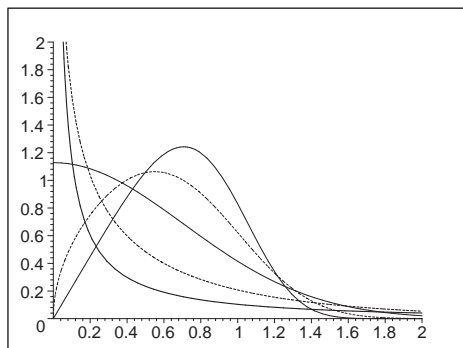


図 22: 一般化ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 1/2$ の場合): $\gamma = 1/2$ (太実線), $\gamma = 1$ (太点線), $\gamma = 2$ (実線), $\gamma = 3$ (点線), $\gamma = 4$ (細実線)

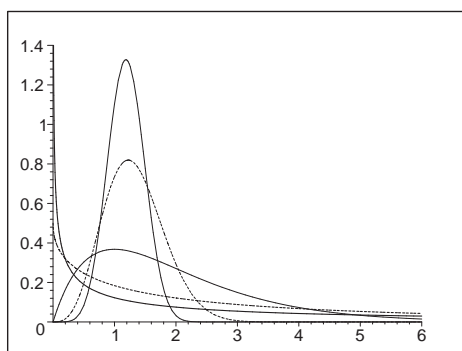


図 23: 一般化ガンマ分布の密度関数 ($\alpha = 2$ の場合): $\gamma = 1/3$ (太実線), $\gamma = 1/2$ (太点線), $\gamma = 1$ (実線), $\gamma = 2$ (点線), $\gamma = 3$ (細実線)

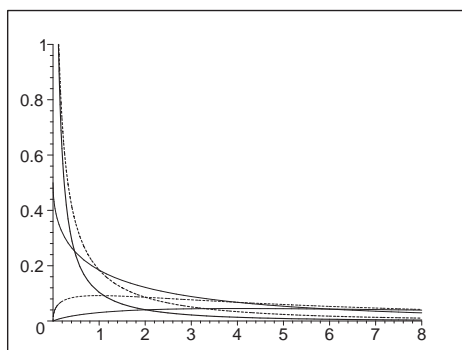


図 24: 一般化ガンマ分布の密度関数 ($\gamma = 1/2$ の場合): $\alpha = 1/2$ (太実線), $\alpha = 1$ (太点線), $\alpha = 2$ (実線), $\alpha = 3$ (点線), $\alpha = 4$ (細実線)

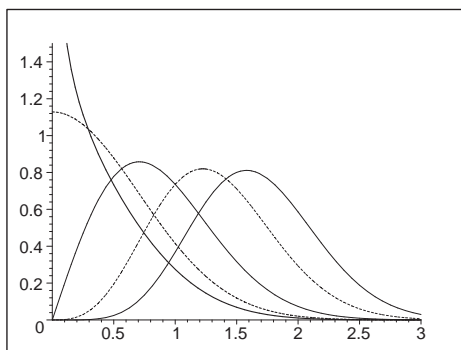


図 25: 一般化ガンマ分布の密度関数 ($\gamma = 2$ の場合): $\alpha = 1/3$ (太実線), $\alpha = 1/2$ (太点線), $\alpha = 1$ (実線), $\alpha = 2$ (点線), $\alpha = 3$ (細実線)