テンソルはなぜ経済学に用いられなかったのか？

山　﨑　好　裕*

はじめに

理学部の学生たちの間では次のような会話は日常茶飯事であろう。

「テンソルって何？」

「ベクトルを一般化したものじゃないの？」

しかし、経済学部の学生たちからそのような会話を聞くことはまずない。理由は簡単である。経済学ではテンソルは用いられてこなかったし、現在も研究にすら使われることはないからである。

テンソルは形式的で抽象的だが有用な概念である。物理学では一般相対性理論の表現のために不可欠のものとして導入された。では、なぜ経済学では用いられなかったのだろうか。本稿ではそれを考えるとともに、経済学においてもテンソルを有効に用いる方向性について考えてみたい。

*福岡大学経済学部

1．投入産出分析におけるテンソル[1]

自分が高校生のときに読んで、ずっと気になっていた本がある。竹内（1971）である。この本のある章で、経済学における数学とは何かを論じていて、ベクトルの拡張としてテンソルの概念について解説していた。私が知る限り、経済学とテンソルについて論じた唯一の文章である。

竹内（1971）の例は、産業連関分析における投入係数行列である。第 i 部門の総産出量から中間投入を引いた最終需要は次のように表すことができる。

$$x_i - \sum_j a_{ij} x_j$$

一方、第 j 部門の得る付加価値は

$$p_j - \sum_i a_{ij} p_i$$

となるであろう。ここで竹内（1971）は、同じ投入係数行列 A が数量から数量へという変換と価格から価格へという変換とを同時に表現している事実を、「理論的に興味深い」として注意を促している。

たとえば、価格が生産量ベクトルの変化に応じて変化するという状況を考え、その変換に関わる行列を B とする。プライムが転置を表すものとすると、このことは

$$\mathrm{p} = p_0 - x'B$$

[1] 竹内（1971）、165ページ。

と表現することができる。行列 B は数量を価格に変換する作用を果たしており、数量を数量に変換する行列とは本質的に異なるものである。

竹内（1971）は、ここで行列という概念が不十分になると言い、テンソルを導入するのである。テンソルの世界では、行列 A の要素を

$$\mathrm{A} = \{a_j^i\}$$

とし、行列 B の要素を

$$\mathrm{B} = \{b^{ij}\}$$

として、性質的に区別して表現することが可能である。第 3 の種類として

$$\mathrm{C} = \{c_{ij}\}$$

を考えることもできる。これらに対応して、数量ベクトルを

$$\mathrm{x} = \{x_i\}$$

と書き、価格ベクトルを

$$\mathrm{p} = \{p^j\}$$

と書くことができる。

一般にテンソルは次のように表現できる。

$$\mathrm{T} = \left\{t_{i_1 i_2 \dots i_h}^{j_1 j_2 \dots j_k}\right\}$$

$$i_1 = 1 \dots n_1, i_h = 1 \dots n_h, j_1 = 1 \dots m_1, j_k = 1 \dots m_k$$

そうするとスカラーもベクトルもテンソルの一部ということになる。スカラーはh＝0，k＝0のテンソルであり、縦ベクトルはh＝1，k＝0、横ベクトルはh＝0，k＝1のテンソルである。行列については、h＝0，k＝2の場合、h＝1，k＝1の場合、h＝2，k＝0の場合という三つが考えられる。

二つのテンソル

$$T_1 = \left\{t_{abc}^{\alpha\beta\gamma}\right\}, T_2 = \left\{s_{\alpha\beta d}^{ab\delta}\right\}$$

が与えられたとき、両者の積を

$$T_1 T_2 = \{\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_a \Sigma_b t_{abc}^{\alpha\beta\gamma} s_{\alpha\beta d}^{ab\delta}\} = \left\{u_{cd}^{\gamma\delta}\right\}$$

と定義する。つまり、上付きの添え字と下付きの添え字に同じものがあれば、その文字について加え合わせたものをテンソル積の要素とするのである。この表記法を使えば、数量ベクトルは

$$\{a_j^i\}\{x_i\} = \left\{\sum_i a_j^i x_i\right\} = \{y_j\}$$

と書けるし、価格ベクトルは

$$\{a_j^i\}\{p^j\} = \left\{\sum_j a_j^i p^j\right\} = \{g^i\}$$

と書ける。他方、

$$\{b^{ij}\}\{x_i\} = \left\{\sum_i b^{ij} x_i\right\} = \{q^j\}$$

は価格ベクトルということになり、

$$\{c_{ij}\}\{p^j\} = \left\{\sum_j c_{ij} p^j\right\} = \{d_i\}$$

は数量ベクトルということになる。

　経済学のテンソル利用では、上付きの添え字で価格を、下付きの添え字で数量を表すとすれば、常に価格と数量を掛けると価額が実数として求められることになるので便利である。だから、価格×数量のテンソル

$$\mathrm{A} = \{a_j^i\}$$

に価格を１回掛けると数量が打ち消されて価格が残り、数量を掛けると価格が打ち消されて数量が残る。これに対して、

$$\mathrm{B} = \{b^{ij}\}$$

は価格の２乗のテンソルだから、数量を掛けると価格が一つ打ち消されて価格が残り、もう一度数量を掛けると価額が出てくる。恒等変換を表す単位行列は価格×数量のテンソルである。だから、A の逆行列は同型のテンソル

$$\mathrm{A}^{-1} = \{\tilde{a}_k^j\}$$

でなければならない。しかし、B の逆行列は

$$\mathrm{B}^{-1} = \{\tilde{b}_{jk}\}$$

となるのであって、テンソルとしてのかたちを異にする。

竹内（1971）の言う通り、確かにテンソルを用いると価格と数量の関係がはっきりしてよいのである。だが、これが本当の便利さになるのは、価格が数量に、数量が価格に影響を与えるような変換を考える場合である。現実の経済学の歴史のなかでは、こうした変換を考える機会が少なかったことが、経済学にテンソルが導入されてこなかった理由であろう。

２．テンソルと一般相対性理論

理論の表現方法としてテンソルが不可欠なのは、何と言っても一般相対性理論であろう。空間に歪みが発生する一般相対性理論の世界では、時空に関する特殊な表現が必要とされる。4 次元時空でのものの長さは、c を光速として次式で表現される。

$$(\Delta r)^2 = g_{xx}(\Delta x)^2 + g_{yy}(\Delta y)^2 + g_{zz}(\Delta z)^2 + g_{tt}(c\Delta t)^2 + 2g_{xy}(\Delta x)(\Delta y) + 2g_{yz}(\Delta y)(\Delta z) + 2g_{zx}(\Delta z)(\Delta x) + 2g_{xt}(\Delta x)(c\Delta t) + 2g_{yt}(\Delta y)(c\Delta t) + 2g_{zt}(\Delta z)(c\Delta t)$$

係数の g は各軸方向の伸縮と 2 軸間の捩れを表す。これらを 2 階のテンソル $g_{\mu\nu}$ で表してやり、時間軸と空間軸を x^i ですべて表せば、式は次のように簡単化できる[2]。

[2] 特殊相対性理論の成り立つミンコフスキー空間では、$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$, $g_{00} = -1$ であり、他はゼロである。

$$(\Delta r)^2 = \Sigma_\mu \Sigma_\nu g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

カール・フリードリヒ・ガウスは測量によって $g_{\mu\nu}$ を調べるだけで、すべての場所で座標と長さの関係を定義できることを証明し、それを「驚愕の定理」と名付けた。ガウスの下で学位をとったゲオルク・フリードリヒ・ベルンハルト・リーマンはこの理論を発展させてリーマン幾何学を完成させた。1912年の段階では、どのようにして重力の理論を表現するかについて全く糸口の掴めていなかったアルベルト・アインシュタインは、1913年の論文「一般相対論および重力理論の構想」で忽然とリーマン幾何学を使うというアイディアに目覚めた。きっかけは数学者マルセル・グロスマンの協力が得られたことである。アインシュタインは古くからの友人グロスマンからリーマン幾何学の存在を初めて教えてもらったのである[3]。それまで全く知られていなかったテンソルの概念が物理学に導入されることになった。

ニュートンの重力理論では重力ポテンシャルΦについて次の式が成立している。

$$\nabla^2 \Phi = k\rho$$

∇は微分演算子、k は定数、 ρ は物質密度である。重力場が十分に弱ければ、

[3] アインシュタインは、光量子やブラウン運動の研究では実に物理学者らしいと思うのだが、相対性理論においての役割はあまり物理学者的とは言えない。特殊相対性理論でも、アインシュタインの1905年論文以前に理論はすっかりできあがっていた。特殊相対性理論の数学構造はヘンドリック・ローレンツの収縮仮説によって完成されていたし、相対性原理の彫琢もアンリ・ポアンカレが行っていた。先行研究を一切サーベイしないという、アインシュタインのだらしのない論文の書き方のせいで、当初知られなかっただけである。アインシュタインがしたのは、ただただ、光速が一定であることを原理として強調したことだけである。

$$g_{00} = -1 - 2\frac{\Phi}{c^2}$$

が成り立つ。また、特殊相対性理論によれば、質量 m の物体は mc^2 のエネルギーを持つから、重力ポテンシャルの 2 階微分はエネルギー密度にも比例するということである。ここから、ニュートンの重力理論を一般相対性理論に拡張した式は

$$\Gamma_{\mu\nu} = \kappa\Theta_{\mu\nu}$$

のかたちになることが予想できる。Γは重力場 $g_{\mu\nu}$ をたかだか 2 階微分して得られる量、κ は定数、Θはその00成分がエネルギー密度になるように拡張されたテンソルである。アインシュタインとグルスマンはΓを見つけることに苦労したが、1915年に既知のテンソルを組み合わせたものをΓとして採用することで問題を遂に解決したのであった。

おわりに

　ピエロ・スラッファの著作から始まる線形代数による理論経済学研究では、価格は投入係数行列などの供給条件から決まってきて、需要がそれに影響を与えることはないという建前が維持されている。需要条件は生産数量をのみ決めていて、両者が交わるということはない。論者たちは、そうすることで新古典派的な需給による価格決定理論を慎重に避けてきた。しかし、現実には需要量が価格に影響するという、価格と数量との交叉も考えざるをえない局面はあるであろう。それをスラッフィアン的な線形経済学の枠組みで行う場合、テンソル概念の導入は有効性を持ち得るであろう。

もう一つの可能性もスラッフィアンである。ルイジ・パシネッティはスラッファの標準標品体系を動学化する試みを行った。パシネッティの動学理論では、投入係数がネピア数の何乗というかたちでそれぞれ逓減していく。そこからパシネッティは動学的標準商品を構成していくのだが、逓減率はもちろん一定である。しかし、現実の技術進歩で投入係数の逓減率は当然変化するであろう。だから、それには微分的な表現を用いるべきである。

まだ、アイディアの段階ではあるが、そこにテンソルの概念が用いられないかを考えている。元々テンソルという用語はラテン語で緊張を表す言葉から来ている。一般相対性理論で10個のテンソルが時空の捩れを表現していたように、技術進歩へ向かう投入量の変化の方向をテンソルで表現することができないかという思い付きである。

参考文献

竹内啓『社会科学における数と量』東京大学出版会、1971年。
吉田伸夫『思考の飛躍 ― アインシュタインの頭脳』新潮社、2010年。