

電荷重畳法による電界計算の物理構造の簡素化*

荒岡 信隆**

Simplification of Physical Structure in Electric Field Computation with Charge Simulation Method

Nobutaka ARAOKA**

Abstract

We proposed the method that simplify a coding using Charge Simulation Method by associating arrays of substitute charges with each dielectric. Electric field computation program “Canbey” can treat a lot of dielectrics and electrodes. We introduced the result of electric field analysis of Plane-Plane electrodes by this method.

Key Words : Electric Field Computation, Charge Simulation Method

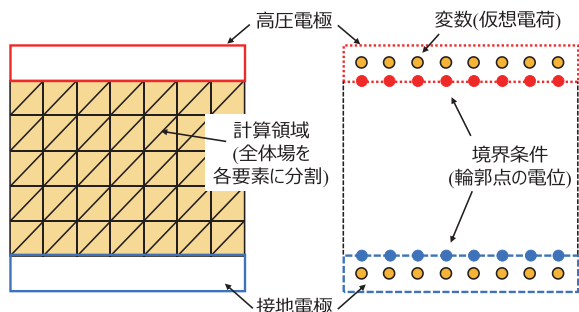
1. はじめに

電力機器の絶縁設計や放電現象の数値解析などの高電圧工学の分野において、空間の電界分布を解析することは極めて重要である。数値電界計算法は大別して領域分割法と境界分割法に分類することができる⁽¹⁾。領域分割法の一つの有限要素法⁽²⁾では、図1(a)のように場の全体を有限個の要素に分割して要素内で成立する関数を仮定し、全体場の静電エネルギーを最小作用の原理を用いて最小にすることでラプラス方程式を等価的に解き、要素内の各節点の電位を求める。一方、境界分割法の一つ

の電荷重畳法⁽³⁾は、ラプラス方程式の数学的線形性を利用して図1(b)のような様々な電荷が作る電位の重畳解として電位を求める。電荷重畳法は境界条件の設定やコーディングが比較的容易かつ短時間で計算することができる上に、極めて正確に電位や電界を求めることができる。また、電界を電位の数値微分をせずに直接求めることができるため、数値微分の誤差なく電界を得ることができる。

電荷重畳法では仮想電荷を適切に配置して境界条件を考慮することで複数の電位や誘電体を考慮した数値計算も可能である。しかしながら、誘電体間の比誘電率の差が大きい場合、各座標の電位を全ての仮想電荷の電位の重畳として求めた値と、誘電体を取り囲む周囲の仮想電荷のみの重畳として求めた値において、前者の誤差が大きく、後者の手法を用いた方が精度良く計算できることが報告されている⁽⁴⁾。このとき境界条件ごとにどちらの仮想電荷を用いるのかコーディングを行う人が都度判断して正確に記述する必要があり、元来計算方法が容易な電荷重畳法のソースコードが複雑になり、保守性が低下することが懸念される。

本論文では、複数の誘電体及び電位を持つ数値計算において電荷重畳法のコーディングの保守性を損ねることなく容易に計算できるように物理構造の簡素化を行ったのでこれを報告する。また、適用例として本解析を用いた計算例を紹介する。



(a) 領域分割法(有限要素法) (b) 境界分割法(電荷重畳法)
図1 領域分割法と境界分割法概念図

* 平成 29 年 11 月 30 日 受付

** 電気工学科

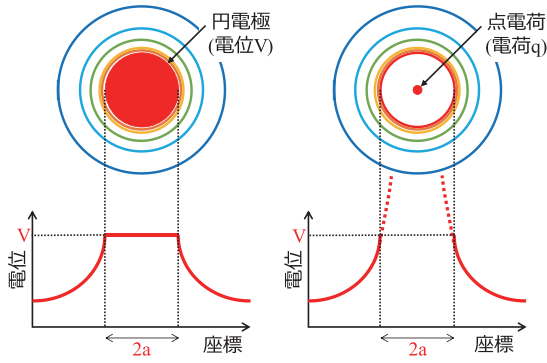


図2 等電位線の模式図

2. 電荷重畳法

(2・1) 計算原理

電荷重畳法の原理をまず2次元平面にて簡単に解説する。図2のようにある半径 a の円電極周囲の電位分布を求めたいとき、その中心位置に電荷 q を持つ点電荷を一つ配置する。点電荷以外に何も存在しないとき無限遠を電位ゼロの基準としてクーロンの法則に従う電位分布が点電荷の周囲に生じる。このとき点電荷から距離 a だけ離れた座標の電位が V となるように電荷 q の大きさを変えると中心から距離 a 以上離れた座標の電位分布は両者とも等しくなる。これを応用して任意の電極系において電位分布を求める計算手法が電荷重畳法である。

具体的に任意の電極周りの静電界を電荷重畳法によって計算する手順を示す。電極内部に n 個の仮想電荷 Q_i ($i=1\sim n$) を配置する。続いて電極の境界線上に仮想電荷と等しい個数の輪郭点 C_j ($j=1\sim n$) を設定し、各輪郭点の電位が電極の電位 V_c と等しいすると、(1)式が成立する。

$$\sum_{i=1}^n P_i(R_i, r_j) \cdot Q_i(R_i) = V_c(r_j) \quad (1)$$

ただし、 $P_i(R_i, r_j)$ は電荷の幾何形状及び輪郭点と仮想電荷の座標によって決まる電位係数である。n 個の輪郭点について上式が成立するため、n 元連立一次方程式が成り立つ。電極が複数個ある場合、同様に電極内部に m 個の仮想電荷 Q_k ($k=1\sim m$) をさらに配置して (n+m) 元連立一次方程式を立てる。

複数の誘電体が存在する場合は、誘電体 A と誘電体 B の境界上において各々 p 個の輪郭点とそれぞれの誘電体の内部に合計 2p 個の仮想電荷を配置する。このとき、誘電体内部の電位を求める場合に使用する仮想電荷は、その誘電体を取り囲む周囲の仮想電荷のみを用いる。

誘電体 A と B の境界面には、電位の連続条件

$$V_A = V_B \quad (2)$$

および、電束密度法線成分の連続条件

$$\epsilon_A E_{nA} = \epsilon_B E_{nB} \quad (3)$$

がそれぞれ成り立つ。ここで E_{nA} 及び E_{nB} は各電界の法線成分である。これらを前記の仮想電荷を用いて表すと (1) 式と同様の形式に書くことができるため、その結果以下の行列式を得ることができる。

$$P \cdot Q = B \quad (4)$$

ここで行列 P は電位係数及び電界係数から成り、列数の仮想電荷の数、及び、行数の境界条件の個数が等しいため、行列 P は正方行列である。また、行列 Q は仮想電荷を表し、行列 B は境界条件を表す。電荷重畳法ではこの行列式を解いて未知数である仮想電荷の電荷を求め、次に計算したい座標と仮想電荷間の電位係数からなる行列 P に求めた仮想電荷の行列 Q を掛けることで、任意の座標の電位を求める数値計算手法である。

(2・2) 仮想電荷

電荷重畳法において仮想電荷の個数、配置場所及び電荷の形状は計算の精度に影響を与える。本論文では、軸対称 3 次元の電荷重畳法で一般的に用いられる仮想電荷を用いており、仮想電荷の形状の種類は点電荷、半無限長線電荷およびリング電荷の 3 種類を用いる。それぞれの電位係数と電界係数を以下に示す。ただし、仮想電荷の座標を (r_q, z_q) 、鏡像法による仮想電荷の座標を $(r_q, -z_q)$ 、計算対象の座標を (r, z) とする。

(1) 点電荷

電荷： 点電荷 q [C]

電位係数：

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right] \quad (5)$$

電界係数：

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r}{l_1^3} - \frac{r}{l_2^3} \right] \quad (6)$$

$$F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z_q - z}{l_1^3} - \frac{z_q + z}{l_2^3} \right] \quad (7)$$

ただし、

$$l_1 \equiv \sqrt{r^2 + (z - z_q)^2}$$

$$l_2 \equiv \sqrt{r^2 + (z + z_q)^2}$$

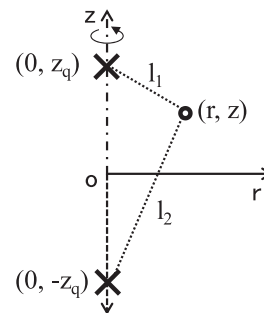


図3 点電荷

(2) リング電荷

電荷 : q [C]

電位係数 :

$$P = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \left[\frac{F(k_1)}{\alpha_1} - \frac{F(k_2)}{\alpha_2} \right] \quad (8)$$

ただし、

$$\alpha_1 \equiv \sqrt{(r+r_q)^2 + (z-z_q)^2}$$

$$\alpha_2 \equiv \sqrt{(r+r_q)^2 + (z+z_q)^2}$$

$$k_1 \equiv \frac{2\sqrt{rr_q}}{\alpha_1}$$

$$k_2 \equiv \frac{2\sqrt{rr_q}}{\alpha_2}$$

また、第1種完全楕円積分は以下のとおり

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$$

電界係数 :

$$F_r = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0 r} \left[\frac{A}{\beta_1^2 \alpha_1} - \frac{B}{\beta_2^2 \alpha_2} \right] \quad (9)$$

$$F_z = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0} \left[\frac{(z-z_p)E(k_1)}{\beta_1^2 \alpha_1} - \frac{(z+z_p)E(k_2)}{\beta_2^2 \alpha_2} \right] \quad (10)$$

ただし、

$$A \equiv \{r^2 - r_q^2 - (z-z_q)^2\} E(k_1) + \beta_1^2 F(k_1)$$

$$B \equiv \{r^2 - r_q^2 - (z+z_q)^2\} E(k_2) + \beta_2^2 F(k_2)$$

$$\beta_1 \equiv \sqrt{(r-r_q)^2 + (z-z_q)^2}$$

$$\beta_2 \equiv \sqrt{(r-r_q)^2 + (z+z_q)^2}$$

また、第2種完全楕円積分は以下のとおり

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

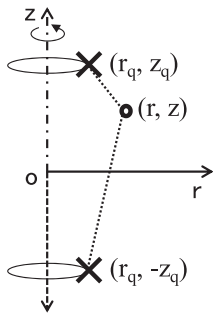


図4 リング電荷

(3) 半無限長線電荷

電荷 : 線電荷密度 q [C/m]

電位係数 :

$$P = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \ln \left[\frac{h_2 + l_2}{h_1 + l_1} \right] \quad (11)$$

ただし、

$$h_1 \equiv z_q - z$$

$$h_2 \equiv z_q + z$$

電界係数 :

$$F_r = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \ln \left[\frac{r}{l_1(h_1 + l_1)} - \frac{r}{l_2(h_2 + l_2)} \right] \quad (12)$$

$$F_z = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right] \quad (13)$$

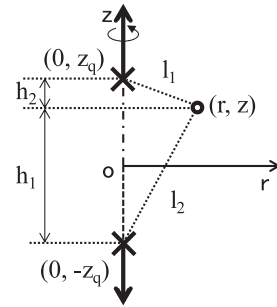


図5 半無限長線電荷

3. プログラミングの簡素化

複数の誘電体が存在する場合、電荷重畳法では計算誤差を小さくするために各誘電体を取り囲む仮想電荷によって内部の電界を計算する必要がある。一般的に数値計算を行うときは各要素が持つ物理量を配列としてメモリ上に確保し解析を行う。電荷重畳法では、2.1節のとおり仮想電荷と輪郭点と検査点を配列として確保する。

しかし、仮想電荷と輪郭点と検査点をそれぞれ一つの配列とすると、輪郭点と検査点における境界条件を方程式として立てる際にどの仮想電荷を用いるかを人の手で選択する必要がある。複数の誘電体が存在する場合、ある領域の計算にどの仮想電荷を用いるかの判断が複雑になり、その都度人が判断すると元来簡易な電荷重畳法によるコーディングが困難になり、保守性も低下する可能性がある。自動的に仕分けるために仮想電荷がどの領域の計算に用いるか記憶する領域を確保する方法も考えられるが、境界上の輪郭点や検査点と、誘電体内部の座標を識別する必要がある。

これらの問題を解決するため、仮想電荷の配置に基づいてグルーピングを施すことで計算時に使用する仮想電荷の選定が極めて容易となる。つまり、図6に示すよう

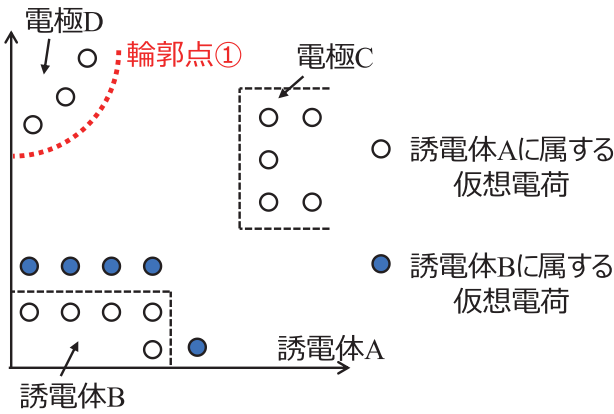
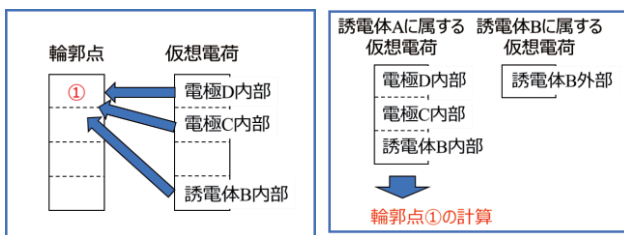


図6 仮想電荷の配置の概略図



(a) 配列が一つするとき (b) 本論文における配列の取り方
図7 仮想電荷の選定方法

にそれぞれの仮想電荷をそれらが取り囲む誘電体に属する集団と見なす。

電荷重畳法は一般的に図7(a)のように仮想電荷等を区別せず一つの配列に確保して取り扱っており、計算に使う際に配列のどの部分の要素を使うか都度判断してコーディングしていた。本論文で提案する方法では、図7(b)のように仮想電荷は誘電体に属する集団であり、その誘電体内部(境界も含む)を計算する際はそこに属する仮想電荷のみを用いて計算を行う。これにより任意の座標を計算する際に配列のどの要素を使って行列式(4)を作るか考える必要がなくなる。したがって、コーディングする際に必要なことは入力された仮想電荷がどの誘電体に属するかの判断と、計算対称の座標がどの誘電体内部に存在するかの判断だけとなり、元来电荷重畳法が持つ簡易さを損ねることなく、汎用性のある数値電界解析を行うことができる。

4. 計算例とその結果の検討

本数値計算プログラムを用いて数値計算を行った例を示す。解析は平板対平板電極を模擬した。高圧側の平板電極は直径 $\phi 35$ 、厚さ5 mm、端部R2.5の円板であり、接地側の平板電極は鏡像面であるr軸で代用した。境界条件として高圧側平板電極の電位を100 V、接地電極の電位を0 Vとした。電極間のギャップ長は10 mmであり、

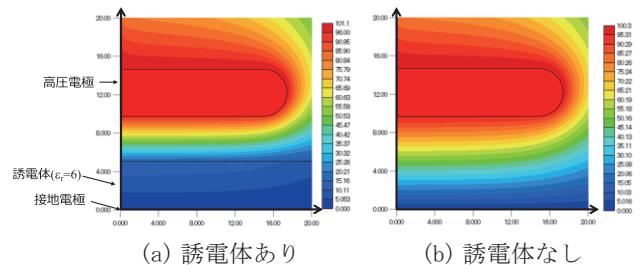


図8 電位分布

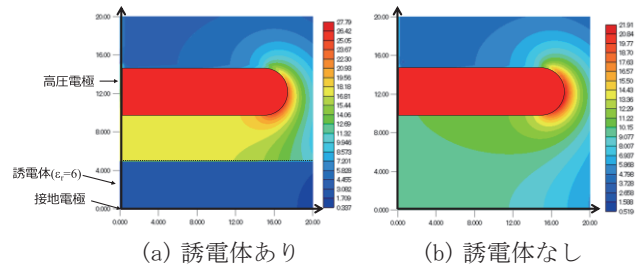


図9 電界絶対値の分布

比誘電率 $\epsilon_r = 6.0$ 、直径 $\phi 40$ 、厚さ5 mmの誘電体をギャップ間の接地側に挿入した。

電極間の電位分布の結果を図8、電界の絶対値を図9に示す。誘電体挿入の効果が分かりやすいように誘電体を除いた平板対平板電極の数値計算結果を並べた。数値計算の結果表示はフリーソフト Graph-R を用いた。

図8(a)から電極間の等電位線は平板に対してほぼ平行になっており電極中心において平等電界となっていることが分かる。また、図8(b)のように誘電体が電極間に挿入されることで、等電位線が高圧側は密に、接地側は疎に変化した。このときのz軸上の電界の絶対値は図9から高圧側は平均して17.1 V/mm、接地側は2.81 V/mmであり、これらの比は6.09となり電極間の比誘電率の比と一致し、数値電界計算が正しく行われていることが確認できた。

5. おわりに

本論文では、複数の誘電体及び電位を持つ数値計算において電荷重畳法のコーディングが保守性を損ねることなく容易に計算できるように物理構造の簡素化を行い、その計算例を示した。これにより、仮想電荷の配置や個数を指定した入力ファイルを与えることで直線または円弧形状の組み合わせによる任意形状の数値電界計算が可能な汎用電界解析プログラムを開発し、大学所在地の福岡県に因んだ名称として「Canbey (カンベイ)」と命名した。今後は浮遊電位や空間電荷の解析を組み込んでいく予定である。

文 献

- (1) 宅間董, 濱田昌司:「数値電界計算の基礎と応用」, 東京電機大学出版局, p.16 (2006)
- (2) 中田高義, 高橋則雄:「電気工学の有限要素法」, 森北出版, pp.21-27 (1982)
- (3) H. Singer, H. Steinbigler and P. Weiss:「A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields」, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, No.5, pp.1660-1668 (1974)
- (4) 紺矢雅之、宅間董、垣本直人、河本正:「周辺電荷を用いる電荷重畳法に関する検討」, 電気学会論文誌 A, Vol.117, No.9, pp.977-982 (1997)