

ベータ分布の形状について

鍵 原 理 人*

1 序論

標準的なベータ分布は、2つの母数を持つ区間 $(0, 1)$ 上の連続型の確率分布である。ベータ分布の密度関数のグラフは、2つの母数の値に応じて柔軟にその形状を変化させる。この2つの母数はいずれも形状母数と呼ばれる。本稿は、ベータ分布の密度関数のグラフの形状が2つの形状母数に応じてどのように変化するかを検討し、その結果として、2つの形状母数に応じてベータ分布を5類型（一様分布，単峰型，U字型，単調増加型，単調減少型）に分類する。

本稿の命題3として提示された知見は、ベータ分布の母数と形状の関係に関する限り、確率分布についての専門的な文献である蓑谷 (2010) や Stuart and Ord (1994), Johnson, Kotz and Balakrishnan (1995), Balakrishnan and Nevzorov (2003), Gupta and Nadarajah (2004), Forbes, Evans, Hastings and Peacock (2011), Krishnamoorthy (2016) よりも詳細もしくは体系的である。例えば、本稿 (2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数のグラフの形状について、Balakrishnan and Nevzorov (2003, pp.140–141) は $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$ の場合に言及せず、同じ場合において、Stuart and Ord (1994, pp.220–221) と Forbes, Evans, Hastings and Peacock (2011, p.55), Krishnamoorthy (2016, p.247) は単に J字型と言及するのみである。また、 $\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$ の場合のベータ分布の形状について、Stuart and

*福岡大学経済学部, E-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

Ord (1994, pp.220–221) は U 字型に分類し, Forbes, Evans, Hastings and Peacock (2011, p.55) と Krishnamoorthy (2016, p.247) は単峰型に分類する. その一方で, $\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合については, 先述の通り, 双方の文献共に J 字型に分類する. この点, $\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$ の場合と $\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合のベータ分布の形状はいずれも単調増加型として言及する方が分類の仕方として一貫性がある. 蓑谷 (2010, p.630) と Johnson, Kotz and Balakrishnan (1995, p.219), Gupta and Nadarajah (2004, p.41) は, $(\alpha - 1)(\beta - 1) \leq 0$ の場合のベータ分布の形状について, 区間 $(0, 1)$ で最大値も最小値も取らない J 字型/逆 J 字型の分布であると言及するのみである. この点, 単調増加型と単調減少型に区分して言及する方が分布の形状の分類としては明快であろう.

その他, 上記の専門的文献以外にもベータ分布の母数と形状の関係に言及する文献は存在する¹. しかし, 例えば, Feller (1971, p.50) や Casella and Berger (2002, p.107) は $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$ の場合の形状について言及せず, 鈴木 (1978, p.67) や竹内他編 (1989, p.38), 中妻 (2007, p.58), Azzalini (1996, p.273) はいずれも $\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$ の場合と $\alpha < 1$ かつ $\beta = 1$ の場合に言及しない. また, 鈴木 (1987, pp.67–68) や渡部 (1999, pp.76–77) は体系的に言及するものの図示のみである. なお, 英語版 Wikipedia はベータ分布の母数と形状の関係について詳細かつ体系的に言及するが, その分類の仕方は本稿と異なる².

以下では, 第 2 節において, 標準的なベータ分布とその位置尺度分布族を導入し, 第 3 節において, ベータ分布の密度関数のグラフの形状が母数に応じてどのように変化するかを検討する. その結果として, 上述のように, 2 つの形状母数に応じてベータ分布を 5 類型に分類する (命題 3). 以上の過程で得られる密度関数の増減表は全て補論 A に提示し, 密度関数のグラフは全て補論 B に図示する. 最後に, 第 4 節で結論を述べる.

¹統計学の理論書でベータ分布に言及しない文献を探すのは困難であろう. しかし, その一方で, ベータ分布の母数と形状の関係に体系的に言及する文献を探すのはそれ程に容易ではない.

²Wikipedia “Beta distribution” (last edited on 31 January 2018 at 17:58) 参照. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution#Shapes

2 標準ベータ分布とその位置尺度分布族

実数 α, β, x に対して, x の関数 $g(x) := x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ を考える. ここで, 等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する. さて, $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合, 関数 $g(x)$ は有界閉区間 $[0, 1]$ で連続であるので, 定積分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ は存在する. その一方で, $\alpha < 1$ または $\beta < 1$ の場合, 関数 $g(x)$ はそれぞれ $x \rightarrow 0$ または $x \rightarrow 1$ の時に $g(x) \rightarrow \infty$ と発散するので, $g(x)$ は区間 $(0, 1)$ で有界ではない. しかし, この場合でも, 十分に小なる任意の正の実数 $\epsilon, \delta > 0$ に対して有界閉区間 $[0+\epsilon, 1-\delta]$ を考えれば, 関数 $g(x)$ は区間 $[0+\epsilon, 1-\delta]$ で連続なので定積分 $\int_{0+\epsilon}^{1-\delta} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ は存在する. ここで, $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$ であれば, 広義積分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^{1-\delta} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ は存在する (例えば, 犬井 1962, p.12 や杉浦 1980, pp.295-296 参照). 従って, 任意の正の実数 $\alpha, \beta > 0$ に対して, 積分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$ は存在する. この積分を α, β の関数と見做したものをベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ という:

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (1)$$

任意の正数 $\alpha, \beta > 0$ と $(0, 1)$ 区間内の任意の実数 $x \in (0, 1)$ に対して, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} > 0$ であるので, ベータ関数は常に正值を取る. 即ち, 任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して $B(\alpha, \beta) > 0$ である.

ベータ分布とは, ベータ関数を正規化定数として密度関数を構成した確率分布である. つまり, 以下の (2) 式で定義される関数 $f_0: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ は $\alpha, \beta > 0$ を母数とする密度関数であり, f_0 を密度関数に持つ確率分布はベータ分布 (特に, 標準ベータ分布) と呼ばれる. また, α と β は形状母数と呼ばれる (Balakrishnan and Nevzorov 2003, Leemis and McQueston 2008, Forbes, Evans, Hastings and Peacock 2011, Krishnamoorthy 2016 参照).

$$f_0(z|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}, \quad 0 < z < 1. \quad (2)$$

実際, $\alpha, \beta > 0$ と $B(\alpha, \beta) > 0$ に注意すると, 任意の実数 $z \in (0, 1)$ に対して, $z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} > 0$ であるので $f_0(z|\alpha, \beta) > 0$ を得る. また, ベー

関数の定義に注意すると, $\int_0^1 f_0(z|\alpha, \beta) dz = 1$ を得る. よって, 関数 f_0 は, 非負値性と正規化条件を満たすので, 確かに密度関数である.

さて, 標準ベータ分布に位置母数と尺度母数を導入することによって, 標準ベータ分布の位置尺度分布族が得られる. Z を標準ベータ分布に従う確率変数 $Z \sim f_0$ として, 実数 μ と正の実数 σ に対して Z を 1 次変換する. 即ち, $X := \mu + \sigma Z$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ とする. この時, X の確率分布を μ を位置母数, σ を尺度母数とする標準ベータ分布の位置尺度分布族という. ここで, $0 < Z < 1$ により $\mu < X < \mu + \sigma$ に注意すると, X の分布関数 F は $\mu < x < \mu + \sigma$ なる x に対して次のように得られる:

$$F(x) := P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^{\frac{x - \mu}{\sigma}} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz.$$

よって, $\mu < x < \mu + \sigma$ なる x に対して, X の密度関数 f は分布関数 F の導関数として得られる³ ($0 < \alpha, \beta, \sigma < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$):

$$f(x|\alpha, \beta, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma B(\alpha, \beta)} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{\beta-1}. \quad (3)$$

以下では, f を密度関数に持つ確率分布 (標準ベータ分布の位置尺度分布族) を一般型ベータ分布と呼ぼう. 因みに, 一般型ベータ分布の期待値は $E(X) = \mu + \sigma\alpha/(\alpha + \beta)$, 分散は $V(X) = \sigma^2\alpha\beta/[(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)]$ となる. 実際, 標準ベータ分布に従う確率変数 $Z \sim f_0$ について, その期待値 $E(Z) = \alpha/(\alpha + \beta)$ と分散 $V(Z) = \alpha\beta/[(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)]$ に注意すると, $X = \mu + \sigma Z$ の期待値と分散はそれぞれ $E(X) = \mu + \sigma E(Z)$, $V(X) = \sigma^2 V(Z)$ と求まる.

さて, $\alpha = \beta = 1$ であるならば, 一般型ベータ分布は区間 $(\mu, \mu + \sigma)$ 上の一様分布に帰着する. 実際, $B(1, 1) = \int_0^1 dx = 1$ に注意すると, $f(x|1, 1, \mu, \sigma) =$

³ $M := \mu + \sigma \iff \sigma = M - \mu$ なる母数変換を施すと, $X := \mu + \sigma Z = \mu + (M - \mu)Z$ の密度関数 f は, $\mu < x < M$ なる x に対して次式で与えられる ($0 < \alpha, \beta < \infty$, $-\infty < \mu < M < \infty$):

$$f(x|\alpha, \beta, \mu, M) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{(x - \mu)^{\alpha-1} (M - x)^{\beta-1}}{(M - \mu)^{\alpha+\beta-1}}.$$

$1/\sigma$ を得る. また, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ の時, 一般型ベータ分布は標準ベータ分布に帰着する: $f(x|\alpha, \beta, 0, 1) = f_0(x|\alpha, \beta)$.

3 ベータ分布の形状

本節では, ベータ分布の密度関数のグラフの形状について考察する. その際, (3) 式で定義される一般型ベータ分布の密度関数 $f(x|\alpha, \beta, \mu, \sigma)$, $\mu < x < \mu + \sigma$ と (2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z|\alpha, \beta)$, $0 < z < 1$ との間に以下の関係式が成立することに注意する. 但し, 以下では, $f(x) := f(x|\alpha, \beta, \mu, \sigma)$, $f_0(z) := f_0(z|\alpha, \beta)$ と略記する.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

これにより, それらの 1 階導関数と 2 階導関数については

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2} f_0'\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad f''(x) = \frac{1}{\sigma^3} f_0''\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

なる関係が成立し, そして, $\sigma > 0$ に注意すると以下を得る:

$$f'(x) \leq 0 \iff f_0'\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \leq 0, \quad f''(x) \leq 0 \iff f_0''\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \leq 0.$$

よって, 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフ $\{(z, f_0(z)) \mid z \in (0, 1)\}$ の形状が判明すれば, その独立変数 z の値を $x = \sigma z + \mu$ と置き換えた上で関数値 $f_0(z)$ を $1/\sigma$ 倍することによって, 一般型ベータ分布の密度関数 $f(x)$ のグラフ $\{(x, f(x)) \mid x \in (\mu, \mu + \sigma)\}$ の形状も判明すると分かる. 従って, 以下では, (2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状について考察する ($0 < z < 1$). その際, 形状母数 $\alpha, \beta > 0$ について, $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合 (第 3.1 節) と $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合 (第 3.2 節) の 2 つの場合に分けて考察した上で, 得られた知見を第 3.3 節で総合する.

3.1 $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合

本節では、 $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合において ($\alpha, \beta > 0$)、標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状について考察する ($0 < z < 1$)。まず、 $\alpha = 1$ かつ $\beta = 1$ の場合、既に第 2 節の最後で論じたように、標準ベータ分布は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に帰着する。次に、 α または β のいずれか一方が 1 でないならば、標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ とその 1 階導関数 $f'_0(z)$ と 2 階導関数 $f''_0(z)$ は以下のように求まる。即ち、 $\alpha = 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合、 $0 < z < 1$ に対して、

$$f_0(z) = \beta(1-z)^{\beta-1}, \quad f'_0(z) = -\beta(\beta-1)(1-z)^{\beta-2}, \quad f''_0(z) = \beta(\beta-1)(\beta-2)(1-z)^{\beta-3}$$

を得て、 $\alpha \neq 1$ かつ $\beta = 1$ の場合、 $0 < z < 1$ に対して以下を得る：

$$f_0(z) = \alpha z^{\alpha-1}, \quad f'_0(z) = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}, \quad f''_0(z) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)z^{\alpha-3}.$$

よって、標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ の増減表は、 $\alpha = 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合に表 2、 $\alpha \neq 1$ かつ $\beta = 1$ の場合に表 3 として得られる (補論 A)。これにより、標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状に関して、 $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合における知見が得られる (命題 1)。

命題 1 (標準ベータ分布の形状： $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合)。 $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合 ($\alpha, \beta > 0$)、(2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(z, f_0(z)) \mid z \in (0, 1)\}$ の形状について以下が成立する。図については補論 B を参照されたい。

$\alpha = 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 (図 1) 密度関数 f_0 は一定値を取る (一様分布)：
 $f_0(z) = 1, \forall z \in (0, 1)$. 従って、 f_0 のグラフの形状は水平となる。

$\alpha = 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合 密度関数 f_0 は単調関数である：

1. $\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (図 8)： f_0 は単調増加の凸関数であり、そのグラフの形状は下に凸の右上りである。また、 $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \beta$ 、 $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ である。

2. $\alpha = 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (図 11): f_0 は単調減少関数であり, そのグラフの形状は右下りである. また, $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \beta$, $x \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$ である.

(a) $\beta < 2$ の場合, f_0 は単調減少の凹関数であり, そのグラフの形状は上に凸の右下りである.

(b) $\beta = 2$ の場合, f_0 のグラフの形状は右下りの直線である.

(c) $\beta > 2$ の場合, f_0 は単調減少の凸関数であり, そのグラフは下に凸の右下りである.

$\alpha \neq 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 密度関数 f_0 は単調関数である (ベキ関数分布/ベキ分布):

1. $\alpha < 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 (図 12): f_0 は単調減少の凸関数であり, そのグラフの形状は下に凸の右下りである. また, $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \alpha$ である.

2. $\alpha > 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 (図 9): f_0 は単調増加関数であり, そのグラフの形状は右上りである. また, $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \alpha$ である.

(a) $\alpha < 2$ の場合, f_0 は単調増加の凹関数であり, そのグラフの形状は上に凸の右上りである.

(b) $\alpha = 2$ の場合, f_0 のグラフの形状は右上りの直線である.

(c) $\alpha > 2$ の場合, f_0 は単調増加の凸関数であり, そのグラフの形状は下に凸の右上りである.

3.2 $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合

本節では, $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合において ($\alpha, \beta > 0$), 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状について考察する ($0 < z < 1$). $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の時, 標準ベータ分布の密度関数 f_0 の 1 階微分は

$$f'_0(z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-2} (1-z)^{\beta-2} [(2-\alpha-\beta)z + \alpha - 1]$$

となり、その符号は以下のように D の符号で決定される：

$$\begin{aligned} f'_0(z) \leq 0 &\iff D := [(2 - \alpha - \beta)z + \alpha - 1] \leq 0 \\ &\iff (2 - \alpha - \beta)z \leq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

$\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の時、 D の符号は母数 α と β に応じて以下のように決定される ($\alpha, \beta > 0$)：

1. $\alpha + \beta = 2$ の場合、 $D = \alpha - 1$ である。従って、以下を得る：

$$D \leq 0 \iff \alpha \leq 1.$$

2. $\alpha + \beta < 2$ の場合、 $2 - \alpha - \beta > 0$ であり以下を得る：

$$D \leq 0 \iff z \leq \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} =: z^*.$$

ここで、 $z^* \geq 0 \iff 1 - \alpha \geq 0 \iff \alpha \leq 1$ であり、 $z^* \leq 1 \iff \beta \leq 1$ であることに注意すると、以下を得る：

- (a) $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ ならば $0 < z^* < 1$ となり、 $z < z^*$ で $D < 0$ 、 $z > z^*$ で $D > 0$ である。
- (b) $\alpha > 1$ ならば (この時 $\beta < 1$ である) $z^* < 0$ となり、任意の $z \in (0, 1)$ で $D > 0$ である。
- (c) $\beta > 1$ ならば (この時 $\alpha < 1$ である) $z^* > 1$ となり、任意の $z \in (0, 1)$ で $D < 0$ である。

3. $\alpha + \beta > 2$ の場合、 $2 - \alpha - \beta < 0$ であり以下を得る：

$$D \leq 0 \iff z \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} = \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} = z^*.$$

ここで、 $z^* \geq 0 \iff \alpha - 1 \geq 0 \iff \alpha \geq 1$ であり、 $z^* \leq 1 \iff \beta \geq 1$ であることに注意すると、以下を得る：

- (a) $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ ならば $0 < z^* < 1$ となり、 $z < z^*$ で $D > 0$ 、 $z > z^*$ で $D < 0$ である。

(b) $\alpha < 1$ ならば (この時 $\beta > 1$ である) $z^* < 0$ となり, 任意の $z \in (0, 1)$ で $D < 0$ である.

(c) $\beta < 1$ ならば (この時 $\alpha > 1$ である) $z^* > 1$ となり任意の $z \in (0, 1)$ で $D > 0$ である.

以上をまとめると, $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の時, 以下を得る ($\alpha, \beta > 0$):

1. $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合: $D \leq 0 \iff z \leq z^*$.

2. $\alpha < 1$ かつ $\beta > 1$ の場合: $\forall z \in (0, 1), D < 0$.

3. $\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合: $\forall z \in (0, 1), D > 0$.

4. $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合: $D \leq 0 \iff z \geq z^*$.

以上の議論により, 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ の増減表は, $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合に表 4, $\alpha < 1$ かつ $\beta > 1$ の場合に表 5, $\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合に表 6, $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合に表 7 として得られる (補論 A). これにより, 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状に関して, $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合における知見が得られる (命題 2).

命題 2 (標準ベータ分布の形状: $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合). $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合 ($\alpha, \beta > 0$), (2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(z, f_0(z)) \mid z \in (0, 1)\}$ の形状について以下が成立する. 図については補論 B を参照されたい.

$\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (図 5, 図 6, 図 7) 密度関数 f_0 のグラフは U 字型の形状を示す. つまり, $f_0(z)$ は $z = z^*$ で最小値を取り, そのグラフの形状は $z < z^*$ で右下り, $z > z^*$ で右上りとなる. また, $z \rightarrow 0$ または $z \rightarrow 1$ の時, $f_0(z) \rightarrow \infty$ である.

$$z^* = \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha - \beta} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha) + (1 - \beta)}.$$

分布の最小点 z^* は, $\alpha = \beta$ の場合, $z^* = 1/2$ により区間 $(0, 1)$ の真中に位置し (図 5), $\alpha < \beta$ の場合, $1 - \alpha > 1 - \beta \Rightarrow z^* > 1/2$ に

より区間 $(0, 1)$ の右寄りに位置し (図 6), $\alpha > \beta$ の場合, $1 - \alpha < 1 - \beta \Rightarrow z^* < 1/2$ により区間 $(0, 1)$ の左寄りに位置する (図 7).

$\alpha < 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (図 13) 密度関数 f_0 は単調減少関数であり, そのグラフの形状は右下りである. また, $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$ である. 但し, $z \rightarrow 1$ における $f_0(z) \rightarrow 0$ への収束は, $\beta < 2$ で傾きが $-\infty$, $\beta = 2$ で傾きが定数 $-\alpha(\alpha + 1)$, $\beta > 2$ で傾きが 0 という形を取る.

$\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (図 10) 密度関数 f_0 は単調増加関数であり, そのグラフの形状は右上りである. また, $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ である. 但し, $z \rightarrow 0$ における $f_0(z) \rightarrow 0$ への収束は, $\alpha < 2$ で傾きが $+\infty$, $\alpha = 2$ で傾きが定数 $\beta(\beta + 1)$, $\alpha > 2$ で傾きが 0 という形を取る.

$\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (図 2, 図 3, 図 4) 密度関数 f_0 のグラフは単峰型の形状を示す. つまり, $f_0(z)$ は $z = z^*$ で最大値を取り (即ち, z^* は最頻値), そのグラフの形状は $z < z^*$ で右上り, $z > z^*$ で右下りとなる. また, $z \rightarrow 0$ または $z \rightarrow 1$ の時, $f_0(z) \rightarrow 0$ である⁴.

$$z^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1) + (\beta - 1)}.$$

分布の最大点 (最頻値) z^* は, $\alpha = \beta$ の場合, $z^* = 1/2$ により区間 $(0, 1)$ の真中に位置し (図 2), $\alpha < \beta$ の場合, $\alpha - 1 < \beta - 1 \Rightarrow z^* < 1/2$ により区間 $(0, 1)$ の左寄りに位置し (図 3), $\alpha > \beta$ の場合, $\alpha - 1 > \beta - 1 \Rightarrow z^* > 1/2$ により区間 $(0, 1)$ の右寄りに位置する (図 4).

⁴ $z \rightarrow 0$ における $f_0(z) \rightarrow 0$ への収束は, $\alpha < 2$ で傾きが $+\infty$, $\alpha = 2$ で傾きが定数 $\beta(\beta + 1)$, $\alpha > 2$ で傾きが 0 という形を取り (図 2 参照), $z \rightarrow 1$ における $f_0(z) \rightarrow 0$ への収束は, $\beta < 2$ で傾きが $-\infty$, $\beta = 2$ で傾きが定数 $-\alpha(\alpha + 1)$, $\beta > 2$ で傾きが 0 という形を取る (図 2, 図 3, 図 4 参照).

3.3 ベータ分布の形状

以上の議論を踏まえると、ベータ分布の母数と形状の関係について、以下の命題3と命題4を得る。また、表1は命題3を表にまとめたものである。

命題3 (標準ベータ分布の形状). (2)式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフ $\{(z, f_0(z)) \mid z \in (0, 1)\}$ の形状は、正值の形状母数 α と β に応じて ($\alpha, \beta > 0$)、以下のように5つの型に分類できる (表1参照). 図については補論Bを参照されたい.

1. $\alpha = \beta = 1$ の場合 (詳しくは命題1参照): 一様分布 (図1).
2. $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (詳しくは命題2参照): 単峰型の形状. 分布の最大点 (最頻値) z^* は $(\alpha - 1)/(\alpha + \beta - 2)$ で, $\alpha = \beta$ ならば $z^* = 1/2$ (図2), $\alpha \leq \beta$ に応じて $z^* \leq 1/2$ (図3, 図4) である. また, $z \rightarrow 0$ または $z \rightarrow 1$ の時, $f_0(z) \rightarrow 0$ である.
3. $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (詳しくは命題2参照): U字型の形状. 分布の最小点 z^* は $(1 - \alpha)/(2 - \alpha - \beta)$ で, $\alpha = \beta$ ならば $z^* = 1/2$ (図5), $\alpha \leq \beta$ に応じて $z^* \geq 1/2$ (図6, 図7) である. また, $z \rightarrow 0$ または $z \rightarrow 1$ の時, $f_0(z) \rightarrow \infty$ である.
4. $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \leq 1$ の場合 ($\alpha \neq \beta$): 単調増加型で右上りの形状.
 - (a) $\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (詳しくは命題1参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \beta$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ である (図8).
 - (b) $\alpha > 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 (詳しくは命題1参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \alpha$ である⁵ (図9).
 - (c) $\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (詳しくは命題2参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ である (図10).
5. $\alpha \leq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合 ($\alpha \neq \beta$): 単調減少型で右下りの形状.

⁵この場合, $z \in [0, 1]$ とすれば $z = 1$ を最頻値とする単峰型に分類することもできる.

- (a) $\alpha = 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (詳しくは命題 1 参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \beta$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$ である⁶ (図 11).
- (b) $\alpha < 1$ かつ $\beta = 1$ の場合 (詳しくは命題 1 参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \alpha$ である (図 12).
- (c) $\alpha < 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (詳しくは命題 2 参照): $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow 0$ である (図 13).

また, 標準ベータ分布の密度関数 f_0 は, $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合に有界であり, $\alpha < 1$ または $\beta < 1$ の場合に有界ではない:

1. $z \rightarrow 0$ の時, $\alpha < 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow \infty$, $\alpha = 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow \beta$, $\alpha > 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow 0$ となる.
2. $z \rightarrow 1$ の時, $\beta < 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow \infty$, $\beta = 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow \alpha$, $\beta > 1$ の場合は $f_0(z) \rightarrow 0$ となる.

因みに, $\alpha = \beta$ の場合, 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ は,

$$f_0(z) = \frac{1}{B(\alpha, \alpha)} [z(1-z)]^{\alpha-1} = \frac{1}{B(\alpha, \alpha)} \left[\frac{1}{4} - \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\alpha-1}$$

となるので, $z = 1/2$ を中心として左右対称となる.

表 1: 標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状の分類

	$\beta < 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \infty$	$\beta = 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \alpha$	$\beta > 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$
$\alpha < 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$	U 字型	単調減少型	単調減少型
$\alpha = 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \beta$	単調増加型	一様分布	単調減少型
$\alpha > 1$: $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$	単調増加型	単調増加型	単峰型

⁶この場合, $z \in [0, 1]$ とすれば $z = 0$ を最頻値とする単峰型に分類することもできる.

命題 4 (一般型ベータ分布の形状). (3) 式で定義される一般型ベータ分布の密度関数 f のグラフ $\{(x, f(x)) \mid x \in (\mu, \mu + \sigma), \mu \in (-\infty, \infty), \sigma \in (0, \infty)\}$ の形状は, 正值の形状母数 α と β に応じて ($\alpha, \beta > 0$), 命題 3 と同じ形で 5 つの型に分類できる. 但し, 密度関数 f のグラフの形状が単峰型 ($\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$) または U 字型 ($\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$) なる場合において, 密度関数 $f(x)$ の最大点 (即ち, 最頻値) もしくは最小点は次となる:

$$x^* = \mu + \frac{\sigma(\alpha - 1)}{\alpha + \beta - 2}.$$

また, 一般型ベータ分布の密度関数 f の有界性についても命題 3 と同様に成立する. 即ち, $x \rightarrow \mu$ の時, $\alpha < 1$ の場合は $f(x) \rightarrow \infty$, $\alpha = 1$ の場合は $f(x) \rightarrow \beta/\sigma$, $\alpha > 1$ の場合は $f(x) \rightarrow 0$ であり, $x \rightarrow \mu + \sigma$ の時, $\beta < 1$ の場合は $f(x) \rightarrow \infty$, $\beta = 1$ の場合は $f(x) \rightarrow \alpha/\sigma$, $\beta > 1$ の場合は $f(x) \rightarrow 0$ である.

最後に, (2) 式で定義される標準ベータ分布の母数と特性値の関係について言及する. 特に, 既述の期待値 (以下, μ と表記する) と最大もしくは最小点 z^* の大小関係, 並びに, 分布の歪みについて言及する. 既に述べられたように, $\mu = \alpha/(\alpha + \beta)$, $z^* = (\alpha - 1)/(\alpha + \beta - 2)$ であり, $0 < z^* < 1 \iff (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \iff [\alpha > 1 \text{ かつ } \beta > 1]$ または $[\alpha < 1 \text{ かつ } \beta < 1]$ である. よって, μ と z^* の大小関係を比較すると, $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (分布の形状は単峰型), z^* は最大点 (最頻値) にして $\mu \leq z^* \iff \alpha \geq \beta$ であり, $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (分布の形状は U 字型), z^* は最小点にして $\mu \leq z^* \iff \alpha \leq \beta$ である. ここで, 標準ベータ分布の歪度を sk と表記すると, $sk \leq 0 \iff \alpha \geq \beta$ であることに注意する (例えば, Balakrishnan and Nevzorov 2003, p.147, Gupta and Nadarajah 2004, p.42 等参照). 以上により, 標準ベータ分布の母数 α, β と特性値 (期待値 μ , 最大もしくは最小点 z^* , 歪度 sk) の関係について以下を得る:

$\alpha = \beta = 1$ の場合 (一様分布) $\mu = 1/2$, $sk = 0$.

$\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合 (単峰型) z^* : 最大点 (最頻値)

$\alpha < \beta$ の場合 $z^* < \mu < 1/2$, $sk > 0$.

$\alpha = \beta$ の場合 $\mu = z^* = 1/2, \quad sk = 0.$

$\alpha > \beta$ の場合 $1/2 < \mu < z^*, \quad sk < 0.$

$\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 (U字型) z^* : 最小点

$\alpha < \beta$ の場合 $\mu < 1/2 < z^*, \quad sk > 0.$

$\alpha = \beta$ の場合 $\mu = z^* = 1/2, \quad sk = 0.$

$\alpha > \beta$ の場合 $z^* < 1/2 < \mu, \quad sk < 0.$

$\alpha \geq 1$ かつ $\beta \leq 1, \alpha \neq \beta$ の場合 (単調増加型) $1/2 < \mu, \quad sk < 0.$

$\alpha \leq 1$ かつ $\beta \geq 1, \alpha \neq \beta$ の場合 (単調減少型) $\mu < 1/2, \quad sk > 0.$

4 結論

命題3で示したように、(2)式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_0 のグラフの形状は大きく5類型に分類される。即ち、ベータ分布の形状は、 $\alpha = \beta = 1$ の場合に一様分布、 $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合に単峰型、 $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合にU字型、 $\alpha \neq \beta$ にして $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \leq 1$ の場合に単調増加型、 $\alpha \neq \beta$ にして $\alpha \leq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合に単調減少型となる。また、標準ベータ分布の密度関数 f_0 は、 $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合に有界であり、 $\alpha < 1$ または $\beta < 1$ の場合に有界ではない。特に、 $\alpha < 1$ の場合は $z \rightarrow 0$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ であり、 $\beta < 1$ の場合は $z \rightarrow 1$ の時に $f_0(z) \rightarrow \infty$ である。同様の結果は、(3)式で定義される一般型ベータ分布についても成立する(命題4)。

謝辞

本稿の執筆に際して、米田清教授（福岡大学）と栗田高光教授（福岡大学）から貴重なコメントを頂戴した。日頃の意見交換の機会と合わせて、ここに記して深く感謝を申し上げたい。

参考文献

- 犬井鉄郎（1962）『特殊函数』岩波書店。
- 杉浦光夫（1980）『解析入門 I』東京大学出版会。
- 鈴木雪夫（1978）『統計解析』筑摩書房。
- 鈴木雪夫（1987）『統計学』朝倉書店。
- 竹内啓他編（1989）『統計学辞典』東洋経済新報社。
- 中妻照雄（2007）『入門ベイズ統計学』朝倉書店。
- 蓑谷千風彦（2010）『統計分布ハンドブック（増補版）』朝倉書店。
- 渡部洋（1999）『ベイズ統計学入門』福村出版。
- Azzalini, A. (1996) *Statistical Inference: Based on the Likelihood*, Chapman & Hall.
- Balakrishnan, N. and V. B. Nevzorov (2003) *A Primer on Statistical Distributions*, John Wiley & Sons.
- Casella, G. and R. L. Berger (2002) *Statistical Inference, 2nd edition*, Duxbury.
- Feller, W. (1971) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 2, 2nd edition*, John Wiley & Sons.

Forbes, C., M. Evans, N. Hastings and B. Peacock (2011) *Statistical Distributions, 4th edition*, John Wiley & Sons.

Gupta, A. and S. Nadarajah (2004) “Mathematical properties of the beta distribution”, In *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*, edited by A. K. Gupta and S. Nadarajah, Marcel Dekker, pp.33–53.

Johnson, N. L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1995) *Continuous Univariate Distributions, Volume 2, 2nd edition*, John Wiley & Sons.

Krishnamoorthy, K. (2016) *Handbook of Statistical Distributions with Applications, 2nd edition*, Taylor & Francis Group.

Leemis, M. L. and J. T. McQueston (2008) “Univariate distribution relationships”, *The American Statistician*, 62, 45–53.

Stuart, A. and J. K. Ord (1994) *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Volume 1: Distribution Theory, 6th edition*, Arnold.

A 標準ベータ分布の密度関数の増減表

本補論は、(2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$, $0 < z < 1$ の増減表を提示する。特に、補論 A.1 は第 3.1 節で得られた増減表を提示し、補論 A.2 は第 3.2 節で得られた増減表を提示する。これにより、2 つの母数 $\alpha, \beta > 0$ と密度関数 $f_0(z)$ のグラフの形状との関係が明らかになる (命題 1, 命題 2)。

A.1 $\alpha = 1$ または $\beta = 1$ の場合

表 2: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha = 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合): $0 < \beta < 1$ (上段左), $1 < \beta < 2$ (上段右), $\beta = 2$ (下段左), $\beta > 2$ (下段右)

z	0		...	1
f'_0	$\beta(1-\beta)$		+	∞
f''_0	$\beta(1-\beta)(2-\beta)$		+	∞
f_0	β		\nearrow	∞

z	0		...	1
f'_0	$\beta(1-\beta)$		-	$-\infty$
f''_0	$\beta(1-\beta)(2-\beta)$		-	$-\infty$
f_0	β		\searrow	0

z	0	...	1
f'_0	-2	-2	-2
f''_0	0	0	0
f_0	2	\searrow	0

z	0		...	1
f'_0	$\beta(1-\beta)$		-	0
f''_0	$\beta(1-\beta)(2-\beta)$		+	*
f_0	β		\searrow	0

*: ∞ ($\beta < 3$ の時), 6 ($\beta = 3$ の時), 0 ($\beta > 3$ の時)

表 3: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha \neq 1$ かつ $\beta = 1$ の場合): $0 < \alpha < 1$ (上段左), $1 < \alpha < 2$ (上段右), $\alpha = 2$ (下段左), $\alpha > 2$ (下段右)

z	0	...	1
f'_0	$-\infty$	-	$\alpha(\alpha-1)$
f''_0	∞	+	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
f_0	∞	\searrow	α

z	0	...	1
f'_0	∞	+	$\alpha(\alpha-1)$
f''_0	$-\infty$	-	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
f_0	0	\nearrow	α

z	0	...	1
f'_0	2	+	2
f''_0	0	0	0
f_0	0	\nearrow	2

z	0	...	1
f'_0	0	+	$\alpha(\alpha-1)$
f''_0	*	+	$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$
f_0	0	\nearrow	α

*: ∞ ($\alpha < 3$ の時), 6 ($\alpha = 3$ の時), 0 ($\alpha > 3$ の時)

A.2 $\alpha \neq 1$ かつ $\beta \neq 1$ の場合

表 4: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合)

z	0	...	z^*	...	1
f'_0	$-\infty$	-	0	+	∞
f_0	∞	\searrow		\nearrow	∞

表 5: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha < 1$ かつ $\beta > 1$ の場合): $1 < \beta < 2$ (左表), $\beta = 2$ (中表), $\beta > 2$ (右表)

z	0	...	1
f'_0	$-\infty$	-	$-\infty$
f_0	∞	\searrow	0

z	0	...	1
f'_0	$-\infty$	-	$-\alpha(\alpha + 1)$
f_0	∞	\searrow	0

z	0	...	1
f'_0	$-\infty$	-	0
f_0	∞	\searrow	0

表 6: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha > 1$ かつ $\beta < 1$ の場合): $1 < \alpha < 2$ (左表), $\alpha = 2$ (中表), $\alpha > 2$ (右表)

z	0	...	1
f'_0	∞	+	∞
f_0	0	\nearrow	∞

z	0	...	1
f'_0	$\beta(\beta + 1)$	+	∞
f_0	0	\nearrow	∞

z	0	...	1
f'_0	0	+	∞
f_0	0	\nearrow	∞

表 7: 密度関数 f_0 の増減表 ($\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合): $\alpha < 2$ かつ $\beta < 2$ (上段左表) / $\beta = 2$ (上段中表) / $\beta > 2$ (上段右表), $\alpha = 2$ かつ $\beta < 2$ (中段左表) / $\beta = 2$ (中段中表) / $\beta > 2$ (中段右表), $\alpha > 2$ かつ $\beta < 2$ (下段左表) / $\beta = 2$ (下段中表) / $\beta > 2$ (下段右表)

$\beta > 2$:

	z	0	...	z^*	...	1		z	0	...	z^*	...	1
$\alpha < 2$:	f'_0	∞	+	0	-	$-\infty$	1	f'_0	∞	+	0	-	0
	f_0	0	\nearrow		\searrow	0	0	f_0	0	\nearrow		\searrow	0
	z	0	...	z^*	...	1/2	...	1	z	0	...	z^*	...
$\alpha = 2$:	f'_0	$\beta(\beta+1)$	+	0	-	$-\infty$	1	f'_0	6	+	0	-	-6
	f_0	0	\nearrow		\searrow	0	0	f_0	0	\nearrow		\searrow	0
	z	0	...	z^*	...	1	1	z	0	...	z^*	...	1
$\alpha > 2$:	f'_0	0	+	0	-	$-\infty$	1	f'_0	0	+	0	-	0
	f_0	0	\nearrow		\searrow	0	0	f_0	0	\nearrow		\searrow	0

B 標準ベータ分布の密度関数のグラフ

本補論は, (2) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 $f_0(z)$, $0 < z < 1$ のグラフを命題3で提示された分類に従って図示する (横軸: z , 縦軸: $f_0(z)$). 本補論で提示する図は全て Maple 6 によるものである.

B.1 $\alpha = \beta = 1$ の場合: 一様分布

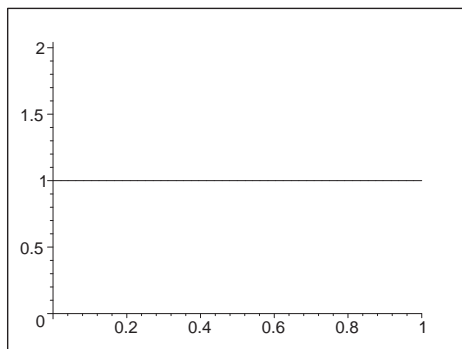


図 1: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = \beta = 1$)

B.2 $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合: 単峰型

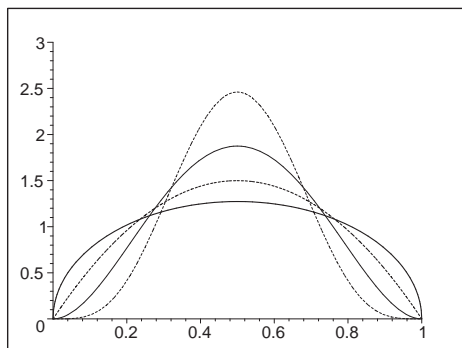


図 2: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = \beta > 1$): $\alpha = 1.5$ (実線), $\alpha = 2$ (点線), $\alpha = 3$ (細実線), $\alpha = 5$ (細点線)

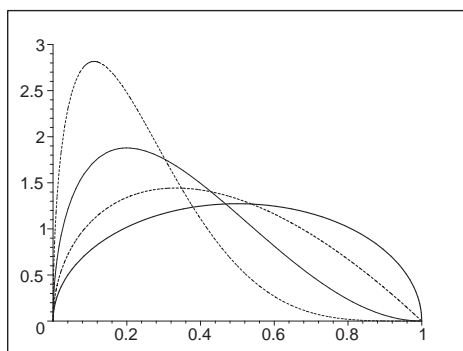


図 3: 標準ベータ分布の密度関数 ($\beta \geq \alpha > 1$, $\alpha = 1.5$): $\beta = 1.5$ (実線), $\beta = 2$ (点線), $\beta = 3$ (細実線), $\beta = 5$ (細点線)

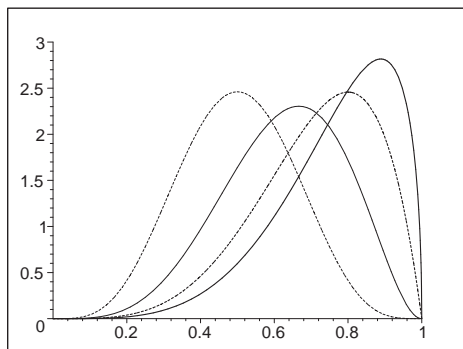


図 4: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha \geq \beta > 1$, $\alpha = 5$): $\beta = 1.5$ (実線), $\beta = 2$ (点線), $\beta = 3$ (細実線), $\beta = 5$ (細点線)

B.3 $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合 : U 字型

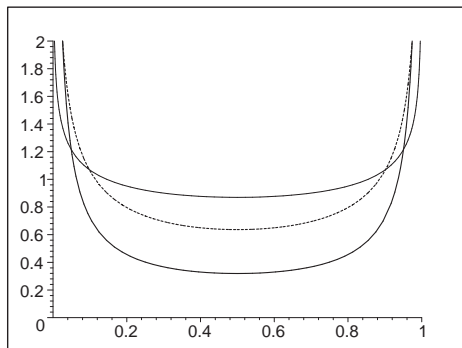


図 5: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = \beta < 1$) : $\alpha = \beta = 0.2$ (実線), $\alpha = \beta = 0.5$ (点線), $\alpha = \beta = 0.8$ (細実線)

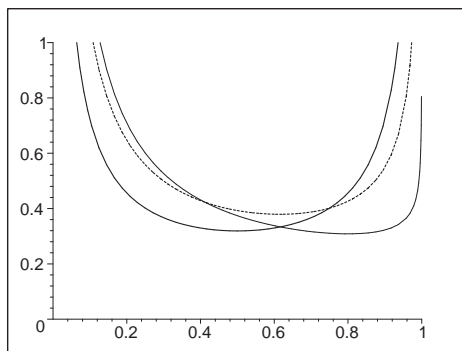


図 6: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha \leq \beta < 1, \alpha = 0.2$) : $\beta = 0.2$ (実線), $\beta = 0.5$ (点線), $\beta = 0.8$ (細実線)

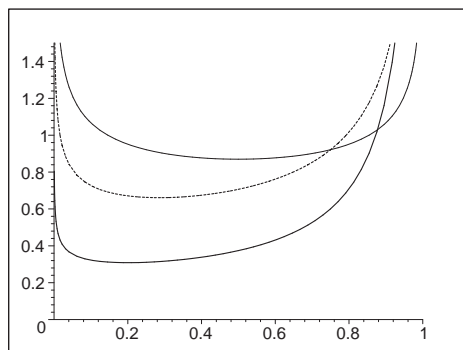


図 7: 標準ベータ分布の密度関数 ($\beta \leq \alpha < 1$, $\alpha = 0.8$): $\beta = 0.2$ (実線), $\beta = 0.5$ (点線), $\beta = 0.8$ (細実線)

B.4 $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \leq 1$ の場合 ($\alpha \neq \beta$): 単調増加型

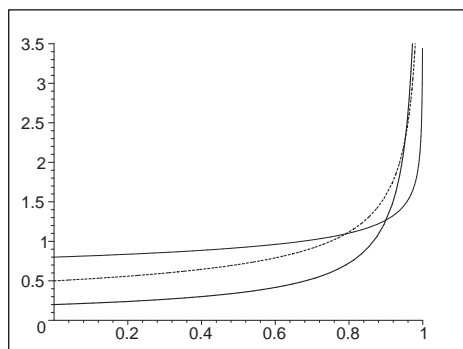


図 8: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = 1$ かつ $\beta < 1$): $\beta = 0.2$ (実線), $\beta = 0.5$ (点線), $\beta = 0.8$ (細実線)

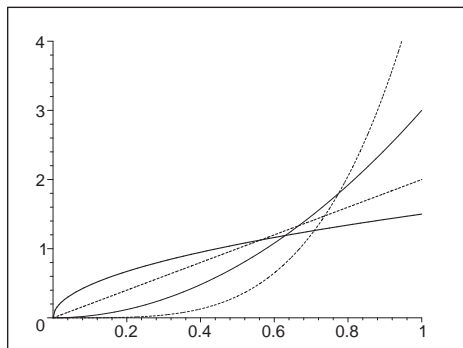


図 9: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha > 1$ かつ $\beta = 1$) : $\alpha = 1.5$ (実線), $\alpha = 2$ (点線), $\alpha = 3$ (細実線), $\alpha = 5$ (細点線)

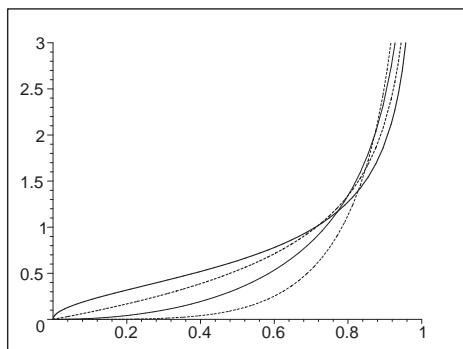


図 10: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha > 1$ かつ $\beta = 0.5 < 1$) : $\alpha = 1.5$ (実線), $\alpha = 2$ (点線), $\alpha = 3$ (細実線), $\alpha = 5$ (細点線)

B.5 $\alpha \leq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合 ($\alpha \neq \beta$): 単調減少型

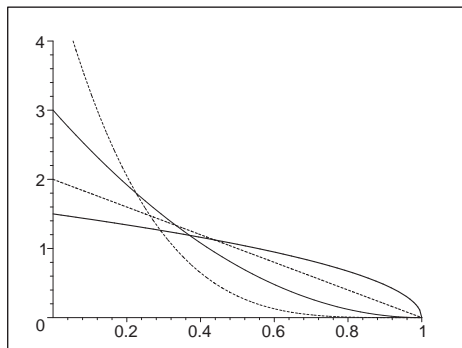


図 11: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = 1$ かつ $\beta > 1$): $\beta = 1.5$ (実線), $\beta = 2$ (点線), $\beta = 3$ (細実線), $\beta = 5$ (細点線)

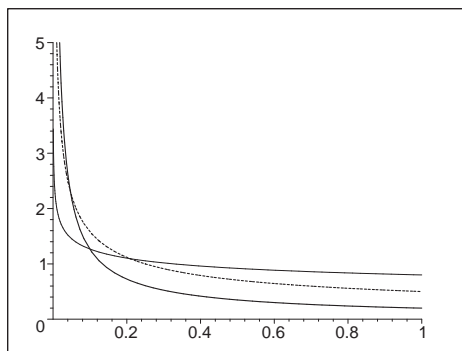


図 12: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha < 1$ かつ $\beta = 1$): $\alpha = 0.2$ (実線), $\alpha = 0.5$ (点線), $\alpha = 0.8$ (細実線)

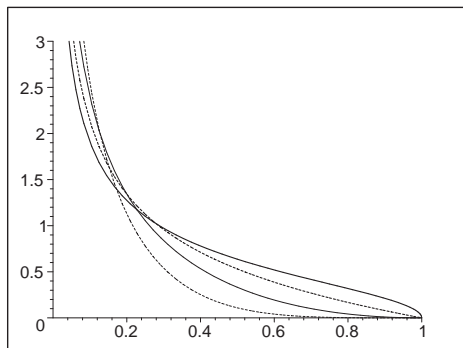


図 13: 標準ベータ分布の密度関数 ($\alpha = 0.5 < 1$ かつ $\beta > 1$): $\beta = 1.5$ (実線), $\beta = 2$ (点線), $\beta = 3$ (細実線), $\beta = 5$ (細点線)