最適輸送問題と微分幾何学・確率解析との接点

理学部教授　桑　江　一　洋

この４月に理学部応用数学科に赴任し、確率論の研究室を担当することになりました。私は生まれも育ちも大阪ですが、父方・母方は沖縄・長崎出身で九州にはご縁があります。大学・大学院は関西でお世話になり、就職は高知大学を皮切りに佐賀大学、横浜市立大学、熊本大学教育学部・工学部をへて福岡大学に赴任いたしました。本稿では、私の専門である確率論のことと、最近興味をもっている最適輸送理論のことについて、お話させていただきます。

確率論・確率過程とは？

小中高で学習した確率は場合の数の計算とそれを用いた離散モデルでの確率論のイメージが強いのではないかと思います。大学での確率論も基本的には同じ考えなのですが、大きい離散モデルをそのまま計算するのは通常困難なので、離散を連続モデルで近似することで概数を計算します。連続モデルでは微分積分学と解析学に裏打ちされた道具をもとにいくつかの公式が展開できるので、それをとりかかりに計算します。小中高の確率は有限の離散モデルだけを扱います。たとえばサイコロを投げるときのモデルで扱う対象は｛1, 2, 3, 4, 5, 6｝と６個の数字からなる集合です。この上に確率を（普通は等確率１/６を）与えます。大学の確率論で扱う世界は無限、特に無限次元の世界を対象とします。無限集合と無限次元は言葉が似ていますが異なる概念です。無限集合の例は自然数の全体が挙げられます。無限次元では数列の全体とか関数の全体や運動の全体などが例として挙げられます。その上に確率をどのように与えるかが大学院で扱う確率論です。無限次元空間、特に運動の全体に値をとる確率変数を確率過程といいます。確率過程の例としてブラウン運動が挙げられます。ブラウン運動は1827年に大英博物館の植物研究員である Robert Brown が花粉の浸透圧による破裂で出現した粒子が複雑な運動をすることを観察し、それが生物の現象でないことを発見した功績にちなんで名付けられました。彼は細胞核の発見者でもあります。やがてブラウン運動は物理的な現象であることが認知され、アインシュタインの研究により原子・分子の存在の根拠となりました。数学モデルとしてのブラウン運動の存在はウィーナーが最初に示しました。ブラウン運動は確率解析において基本となる概念で、そのいくつかの性質が確率論の各分野へ発展してきました。その性質の中でマルコフ性というものが挙げられます。マルコフ性とは数式等で厳密に述べると専門的になるので比喩的に述べますと「過去の経歴に依存せずに未来の挙動の確率が現時点のみで決定される」という確率過程です。私の研究領域はこのマルコフ性に着目した「マルコフ過程」というものです。マルコフ過程は関数解析学、線形偏微分方程式やポテンシャル論と密接に関連しています。特に関数解析学を基礎にした「ディリクレ形式」という概念が「マルコフ過程」と対応することが知られていて、そのことを土台として確率論だけでなく解析学を道具に研究をしています。

モンジュの問題

次のような問題を考えます。

問題１：ある砂山をそれと同じ体積の穴に移したい。砂粒の移動には移動距離に依存したコストがかかるとき、最適な移動のさせ方は何か？

この問題は仏の数学者・工学者である Gaspard Monge の1781年の論文の中で提唱され、モンジュの最適輸送問題と呼ばれています。モンジュはラプラス、フーリエと並んでナポレオンに仕えた数学者の一人であり、真面目で正義感の強い人物でしたが、それが災いしてか、ナポレオンを最後まで信奉した

ため最後には悲惨な末路を迎えた逸話が残っています。さて問題の文面のままでは何が問題なのか分りにくいのかと思います。実は砂山の砂粒はそれを移動させたら空中（地中？）で静止してそこに留まっていることを暗に仮定しています。解りやすい形にすると次のようになります。

問題２：n 個の工場と n 個の店舗があり、各工場から各店舗にそれぞれ一個の製品のみを移動させ距離に応じてコストがかかるとき、総コストを最小にする移動のさせ方はなにか？

問題２の解は工場と店の具体的な配置から決まります。しかも移動のさせ方は n! 通りしかないのでその中から具体的な解を探せます。最初の**問題１**は**問題２**において工場の個数が無限にしかも至る所密に詰っていて、さらに異動先の店舗も無限で密に詰っている状況の問題と解釈することができますが、さらに一歩進めて「密に詰った無限の各工場から密に詰った無限の各店舗に総コストが最小になるような１対１上への写像を決める問題」と理解できます。これはたいへんな難問で、解決されるまでに長い年月がかかりました。露の数学者・経済学者カントロビッチがモンジュの問題を、写像を決めるのでなく「工場の散らばり（確率分布）と店舗の散らばり（確率分布）が与えられているときに移動の総コストが最小になるような工場と店舗の配置の結合分布を決めよ」という問題に置き換えました。これをモンジュ・カントロビッチ問題（以下 MK 問題）と呼びます。MK 問題はモンジュの問題よりは解決が数学的には易しく、カントロヴィッチは関連する業績で1975年にノーベル経済学賞を受賞します。モンジュの問題はコスト関数を２点間の距離から距離の２乗に変えることで MK 問題を経由して1987年に仏の数学者 Yann Brenier 氏によって厳密に解かれました。

曲率次元条件

微分幾何学では図形の曲がり具合を表した曲率という数学的概念があります。曲率には断面曲率というものとリッチ曲率というものが有ります。リッチ曲率は図形の解析的特性、例えば固有値（固有振動数）や熱方程式の解の挙動などと深く関わっています。滑らかな図形を一般化したものをリーマン多様体といいますが、それが収束したときの極限の図形は一般にもはや滑らかでなく尖った箇所（特異点）がある図形になる場合があります。断面曲率を下から一様に押さえた場合のその極限図形はアレキサンドロフ空間というものになります。この空間は滑らかでないので特異点で断面曲率を考えることができません。しかし“断面曲率が下に有界”という概念を初等幾何的な考えで定式化することはできます。しかるに同じことをリッチ曲率で考えて定式化できるかどうかは長い間不明でした。そのような中でボン大学の F. Otto 教授と仏の若手数学者 C. Villani 教授が共同で Y. Brenier 教授のモンジュ問題の解決の手法を用いてリッチ曲率が０以上であることと同等の条件を見いだします。その結果は一般のリーマン多様体に拡張され“リッチ曲率≧K”の概念と MK 問題から決まる確率分布の空間上のエントロピーの K−凸性との同等性がボン大学の K. Th. Sturm 教授等によって示されました。また“リッチ曲率≧K かつ次元≦N”も対応する関数の凸性と同等であることも判明しています。C. Villani 教授や K. Th. Sturm 教授はこれを曲率次元条件（CD（K, N）と以下する）と呼んで定式化し、それを満たす空間の解析的あるいは幾何学的性質を精力的に研究しています。モンジュの問題もアレキサンドロフ空間上で解決されることが最近の研究で判明しています。現在、私はマルコフ過程の研究だけにとどまらず幾何学的な特異空間の性質の解明を確率論の応用として捉えた研究もしています。例えば CD（K, N）よりも弱い条件下で図形の解析的あるいは幾何学的性質を研究してきました。そのような条件下でラプラシアン（２階の微分作用素）の比較定理を導出することに成功しました。それと私の最初の研究分野であるマルコフ過程論の結果を応用することで位相的分裂定理というものを得ることにも成功しました。分裂定理というのはリーマン多様体のときにはリッチ曲率が非負で直線を含めばその図形が直線と一つ次元の落ちた図形を掛けた形に書けるという主張です（長方形は線分と線分との掛けた形で書ける図形であることを参考に想像してください）。現在は上記の条件のもとでブラウン運動の比較定理を精密な形で導出できないか模索しています。これがわかると確率論的な手法がある程度適用できることが見込めます。