完備 Riemann 多様体内の長さ無限大の Kirchhoff 弾性棒

川久保　哲[1)]

(平成25年 5 月31日受理)

Kirchhoff Elastic Rods of Infinite Length in a Complete Riemannian Manifold

Satoshi KAWAKUBO[1)]

(Received May 31, 2013)

Abstract

We study the initial-value problem for the equation of the Kirchhoff elastic rod in a complete Riemannian manifold. Then the existence and uniqueness of global solutions are proved.

1　序

本稿では，完備 Riemann 多様体 $\mathscr{M}$ 内において，Kirchhoff 弾性棒の方程式の初期値問題について考察する．特別な場合，即ち $\mathscr{M}$ が定曲率空間の時には，[8] において大域解の一意的存在が示されている．本稿の目的は，この結果を $\mathscr{M}$ が一般の完備 Riemann 多様体の場合に拡張することである．

一次元弾性体 (例えばピアノ線のような弾力の強い針金) の数学的モデルについて，18 世紀以来，様々な観点から多くの研究がなされてきている ([2], [17], etc.)．Kirchhoff 弾性棒はこのようなモデルの代表的なものである．Kirchhoff 弾性棒は，元々は 3 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内において考えられた概念であったが，自然に一般の Riemann 多様体 $\mathscr{M}$ 内に拡張することができる ([7], [9], [10])．具体的には，通常の微分を共変微分に置き換えることによってエネルギーを一般化し，そこから導かれる Euler-Lagrange 方程式の解として Kirchhoff 弾性棒を定義する ([10])．

$\mathscr{M}$ が比較的単純な Riemann 多様体の場合，例えば，3 次元定曲率空間 $\boldsymbol{R}^3, S^3, H^3$ の場合，Kirchhoff 弾性棒 (あるいは，その特殊型である弾性曲線) の具体的な形に関する研究が詳しくなされている ([3], [6], [7], [10], [11], [14], [15], etc.) しかし，一般の Riemann 多様体の場合，Euler-Lagrange 方程式を具体的に解くことは極めて困難である．

ここでは，より基本的な問題に戻り，Euler-Lagrange 方程式 (本稿の (2.2), (2.3)) の初期値問題について考える．この種の方程式に対し，様々な観点から境界値問題の結果が知られているが ([1], [9], [13], etc.)，初期値問題を正面から扱った結果はあまり知られていないようである．弾性曲線の方程式で，$\mathscr{M}$ が両側不変計量の入ったコンパクト Lie 群の時には，Popiel-Noakes ([18]) によって，初期値問題の大域的な解 ($\boldsymbol{R}$ 全体で定義された解) が一意的に存在することが示されている．また，Kirchhoff 弾性棒の場合は，$\mathscr{M}$ が定曲率空間の時に大域的な解が一

1) 福岡大学理学部応用数学科，〒 814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1
Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Fukuoka University, 8-19-1, Nanakuma, Jonan-ku, Fukuoka, 814-0180, Japan

意的に存在することが著者によって示されている ([8]). 今回は，この結果を，$\mathscr{M}$ が一般の完備 Riemann 多様体の時に拡張することができたことを報告する．これにより，完備 Riemann 多様体内の長さ有限の Kirchhoff 弾性棒は，必ず長さ無限大の Kirchhoff 弾性棒に自然に延長できる，ということが分かる．

Euler-Lagrange 方程式は常微分方程式であるから，初期値問題の局所解の存在はほぼ自明であるが，大域解の存在は決して自明ではない．実際，一般の変分問題の解曲線の場合，大域解が存在しない事がある．例えば，bienergy の制限付き変分問題の解として，biminimal curve というものが定義される．この biminimal curve には，大域解に延長できないものが存在することが知られている ([5], [16]).

なお，本稿では証明の概略のみを述べる．証明の詳細については別の論文で発表する予定である．

2 Kirchhoff 弾性棒

ここでは，Kirchhoff 弾性棒の定義を述べる．$\mathscr{M}$ を $n(\geq 2)$ 次元 Riemann 多様体とし，$\langle *, * \rangle$ で $\mathscr{M}$ の Riemann 計量，$|*|$ でノルム，∇ で Levi-Civita 接続，R で曲率テンソル (符号は [12] に従う) を表す．議論の煩雑さを防ぐため，特に断りがない限り，多様体，曲線，ベクトル場，関数等はすべて C^∞ 級とする．

$\gamma = \gamma(t) : [t_1, t_2] \to \mathscr{M}$ を弧長径数の (即ち速さが 1 の) 曲線とする．曲線 γ のみではピアノ線の捩れ方を表せないので，次のようなものを導入する．$M = (M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ を，γ に沿った法束 $T^\perp\mathscr{M}$ の正規直交枠場とする．(従って，各 t に対して $(\gamma'(t), M_1(t), M_2(t), \ldots, M_{n-1}(t))$ は接空間 $T_{\gamma(t)}\mathscr{M}$ の正規直交枠である．) このような γ と M の組 $\{\gamma, M\}$ を適合枠付き弧長径数曲線とよび，これによってピアノ線の形態を表す．γ を中心曲線，M を物質枠とよぶ．

$\nu > 0$ をピアノ線の材質により決まる定数とし，曲げと捩れの両方の効果を考えたエネルギー $\mathfrak{T}$ を次のように定義する．

$$\mathfrak{T}(\{\gamma, M\}) = \int_{t_1}^{t_2} |\nabla_t \gamma'|^2 dt + \nu \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_1}^{t_2} |\nabla_t^\perp M_i|^2 dt \tag{2.1}$$

ここで，$\nabla^\perp$ は γ に沿う法束 $T^\perp\mathscr{M}$ の法接続を表す．(即ち $\nabla_t^\perp M_i = \nabla_t M_i - \langle \nabla_t M_i, \gamma' \rangle \gamma'$ である．) (2.1) の右辺の第一項は曲げエネルギー，第二項が捩れのエネルギーである．

$\mathfrak{T}$ の Euler-Lagrange 方程式を計算すると (2.2), (2.3) のようになる．なお，$\{\gamma, M\}$ の許容される変分としては，γ の両端点 $\gamma(t_1), \gamma(t_2)$，及び両端点における枠 $(\gamma'(t_1), M_1(t_1), \ldots, M_{n-1}(t_1))$, $(\gamma'(t_2), M_1(t_2), \ldots, M_{n-1}(t_2))$ を固定し，弧長径数も保つものを考える．(ここで考えている“理想的な一次元弾性体”では，長さの伸縮は無く，曲げと捩れの効果のみが有効である．そのため，弧長径数を保つ変分で考える．)

$$\begin{aligned} &\nabla_t \Big[2\nabla_t^2 \gamma' + (3|\nabla_t \gamma'|^2 - \mu + \nu |a|^2)\gamma' \Big] - 4\nu \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle \nabla_t^2 \gamma', M_i \rangle a_{ji} M_j \\ &\quad + 2R(\nabla_t \gamma', \gamma')\gamma' + 2\nu \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ji} R(M_j, M_i)\gamma' = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$(\nabla_t^\perp M_1, \ldots, \nabla_t^\perp M_{n-1}) = (M_1, \ldots, M_{n-1})a. \tag{2.3}$$

ここで，$\mu \in \boldsymbol{R}$，$a \in \mathfrak{o}(n-1)$ である．(ただし $\mathfrak{o}(n-1)$ は $n-1$ 次歪対称行列全体のなす Lie 環を表す．) また，∇_t^2 は $(\nabla_t)^2$ を表す．(2.2) と (2.3) の導出については [10] の第 2 節を参照せよ．

(2.3) で，行列 a は t によらないことに注意する．このことから，Euler-Lagrange 方程式が満たされるならば，捩れのエネルギー ($\mathfrak{T}$ の第二項) の被積分関数が t に依らないことがわかる．これは，もしエネルギー $\mathfrak{T}$ が平衡な状態ならば，(曲げは別にして) 捩れはピアノ線の一部に集中することはなく全体に一様に分布することを表している．

定義 1. $\{\gamma, M\}$ を $\mathscr{M}$ 内の適合枠付き弧長径数曲線とする．ある $\mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$ が存在して，(2.2) と (2.3) が成り立つとき，$\{\gamma, M\}$ を Kirchhoff 弾性棒という．a は一意的に定まるが，この a を $\{\gamma, M\}$ の捩れ行列という．

3　主定理

まず Kirchhoff 弾性棒の方程式の初期値問題を厳密に定式化する．方程式 (2.2), (2.3) は γ に関して 4 階，M に関して 1 階の方程式であるから，粗く言うと 1 点における γ の $0,1,2,3$ 階微分，M の 0 階微分を与えた時の解を求める問題になる．しかし，ここでは $\gamma(t)$ に弧長径数という制限がついているので，γ の $1,2,3$ 階微分に相当するベクトルを無条件に与えても初期値問題は解けない．まずはこれらのベクトルが満たすべき条件を求める．

$\gamma(t)$ を $\mathscr{M}$ 内の弧長径数曲線とする時，3 つのベクトル $\gamma', \nabla_t\gamma', \nabla_t^2\gamma'$ が満たす関係式を求めよう．まず $|\gamma'| = 1$ が成り立つ．$|\gamma'|^2 = 1$ を次々に微分していくと次が成り立つことが容易に分かる．

$$\langle \nabla_t\gamma', \gamma'\rangle = 0, \quad \langle \nabla_t^2\gamma', \gamma'\rangle = -|\nabla_t\gamma'|^2$$

従って初期値問題は次のように定式化できる．

問題. $t_0, \mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$, $x \in \mathscr{M}$ とし，$V_1, V_2, V_3 \in T_x\mathscr{M}$ 及び $L_1, \ldots, L_{n-1} \in T_x\mathscr{M}$ を次をみたすベクトルとする．

$$\begin{aligned} &|V_1| = 1, \quad \langle V_2, V_1\rangle = 0, \quad \langle V_3, V_1\rangle = -|V_2|^2, \\ &\langle L_j, V_1\rangle = 0 \ (1 \le j \le n-1), \quad \langle L_i, L_j\rangle = \delta_{ij} \ (1 \le i, j \le n-1). \end{aligned} \tag{3.1}$$

この時，t_0 を含む区間で定義された，$\mathscr{M}$ 内の適合枠付き弧長径数曲線 $\{\gamma(t), M(t)\}$ で，方程式 (2.2), (2.3) と初期条件

$$\begin{aligned} &\gamma(t_0) = x, \quad \gamma'(t_0) = V_1, \quad (\nabla_t\gamma')(t_0) = V_2, \quad (\nabla_t^2\gamma')(t_0) = V_3, \\ &M(t_0) = (M_1(t_0), \ldots, M_{n-1}(t_0)) = (L_1, \ldots, L_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

をみたすものが存在するか．

この問題に関して，大域的な解 (つまり $\boldsymbol{R}$ 全体で定義された解) が一意的に存在することが示せる．即ち次の主定理が成り立つ．

定理 2. $\mathscr{M}$ を n (≥ 2) 次元完備 Riemann 多様体とする．$t_0, \mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$, $x \in \mathscr{M}$ とし，ベクトル $V_1, V_2, V_3 \in T_x\mathscr{M}$ 及び $L_1, \ldots, L_{n-1} \in T_x\mathscr{M}$ を，条件 (3.1) をみたすものとする．この時，$\boldsymbol{R}$ 全体で定義された，$\mathscr{M}$ 内の適合枠付き弧長径数曲線 $\{\gamma, M\}$ で，方程式 (2.2), (2.3) と初期条件 (3.2) をみたすものが一意的に存在する．

4　主定理の証明の概略

ここでは，定理 2 の証明の概略を述べる．

4.1　準備

ここでは，問題を扱いやすい形に書き換える．まず，方程式 (2.3) は法接続 $\nabla^\perp$ を用いて書かれているので，通常の共変微分のみを用いた形に直す．$\nabla^\perp$ の定義と $\langle \gamma', M_i\rangle = 0$ により，(2.3) は次と同値であることが容易に分かる．

$$\nabla_t M_i = -\langle \nabla_t\gamma', M_i\rangle\gamma' + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji} M_j. \tag{4.1}$$

よって，方程式系 (2.2), (2.3) の代わりに，方程式系 (2.2), (4.1) を考えればよい．

次に $\{\gamma, M\}$ に課された条件について考える．前節の問題には，$\{\gamma, M\}$ に“適合枠付き弧長径数曲線”という条件が課されていた．即ち，曲線 $\gamma(t)$ は弧長径数であり，ベクトル場の組 $M = (M_1, \ldots, M_{n-1})$ は γ に沿った法束の正規直交枠場でなければならない．しかし実は，初期条件 (3.2) をみたす (2.2), (4.1) の解は，必然的にこの条件をみたすことが示せる．即ち次の命題が成り立つ．証明は，ある線形常微分方程式系の解の一意性を示すことに帰着するが，ここでは詳細は省略する．

命題 3. $t_0, \mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$, $x \in \mathscr{M}$ とし，ベクトル $V_1, V_2, V_3 \in T_x\mathscr{M}$ 及び $L_1, \ldots, L_{n-1} \in T_x\mathscr{M}$ を，条件 (3.1) をみたすものとする．γ を $\mathscr{M}$ 内の曲線とし，$M = (M_1, M_2, \ldots, M_{n-1})$ を γ に沿う $n-1$ 個のベクトル場の組とする．(ここで t は γ の弧長径数とは限らず，M は法束の正規直交枠場とは限らないものとする．) このとき，もし $\{\gamma, M\}$ が方程式系 (2.2), (4.1) と初期条件 (3.2) をみたすならば，$\{\gamma, M\}$ は適合枠付き弧長径数曲線になる．従って，この $\{\gamma, M\}$ は Kirchhoff 弾性棒である．

従って，もし次の命題を示すことができれば，定理 2 が証明できたことになる．

命題 4. $\mathscr{M}$ を n (≥ 2) 次元完備 Riemann 多様体とする．$t_0, \mu \in \boldsymbol{R}$, $a \in \mathfrak{o}(n-1)$, $x \in \mathscr{M}$ とし，ベクトル $V_1, V_2, V_3 \in T_x\mathscr{M}$ 及び $L_1, \ldots, L_{n-1} \in T_x\mathscr{M}$ を，条件 (3.1) をみたすものとする．この時，曲線 $\gamma : \boldsymbol{R} \to \mathscr{M}$ と，γ に沿ったベクトル場の $n-1$ 個の組 $M = (M_1, \ldots, M_{n-1})$ で，方程式 (2.2), (4.1) と初期条件 (3.2) をみたすものが一意的に存在する．

以下で，命題 4 の証明の概略を述べる．

4.2 局所解の存在

まず，局所解の存在を示す．点 x の周りの局所座標をとる．(2.2), (4.1) の座標表示は，γ の座標成分に関して 4 階，M の座標成分に関して 1 階の正規型常微分方程式系になることが容易に確かめられる．従って，Picard-Lindelöf の定理 ([4]) により，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，次が成り立つ．ある曲線 $\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathscr{M}$，及び γ にそった $n-1$ 個のベクトル場の組 $M = (M_1, \ldots, M_{n-1})$ が一意的に存在して，方程式 (2.2), (4.1) 及び初期条件 (3.2) が満たされる．以上により，$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 上で定義された局所解 $\{\gamma, M\}$ が得られた．

4.3 大域解の存在

次に大域解の存在を示す．上で作った $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ 上の局所解 $\{\gamma, M\}$ が右側へ ∞ まで延長できることを示そう．右側への極大延長解の範囲が $(t_0 - \varepsilon, t_m)$ (ただし $t_m \in \boldsymbol{R}$) であったと仮定して矛盾することを言えばよい．

まず，命題 3 より $\gamma(t)$ は弧長径数曲線である．また $\mathscr{M}$ が完備であるという仮定から，極限点 $y := \lim_{t \to t_m - 0} \gamma(t)$ $(\in \mathscr{M})$ が存在する．y の周りの座標近傍 $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ をとり，座標成分を次のようにボールド文字で書くことにする．

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} x^1 \circ \gamma \\ x^2 \circ \gamma \\ \vdots \\ x^n \circ \gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_i = \begin{pmatrix} M_i^1 \\ M_i^2 \\ \vdots \\ M_i^n \end{pmatrix}.$$

ただし，M_i^l $(l = 1, \ldots, n)$ は M_i の $\partial/\partial x^l$ 成分を表す．Riemann 計量によるノルム $|*|$ と区別するため，通常の Euclid ノルムを $|*|_E$ と書くことにする．

さて，(2.2), (4.1) の座標表示は $\boldsymbol{\gamma}$ に関して 4 階，$\boldsymbol{M}_i$ に関して 1 階の方程式系であった．ここで次が成り立つ．

主張 5. $t \to t_m - 0$ の時，$|\boldsymbol{\gamma}|_E$, $|\boldsymbol{\gamma}'|_E$, $|\boldsymbol{\gamma}''|_E$, $|\boldsymbol{\gamma}'''|_E$, $|\boldsymbol{M}_i|_E$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ は全て有界である．

これを一旦認める．すると，[4] と同様の議論により，極限値 $\lim_{t \to t_m - 0} (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\gamma}'', \boldsymbol{\gamma}''') \in \boldsymbol{R}^{4n}$, $\lim_{t \to t_m - 0} \boldsymbol{M}_i \in \boldsymbol{R}^n$ が存在することが分かる．よって，$t = t_m$ において，この極限値を初期値とする局所解を作ることにより，t_m よ

りも右側に解を延長することができる．これは，極大延長解の範囲が $(t_0-\varepsilon, t_m)$ であるという仮定に反する．以上により，解は右側に ∞ まで延長できることが証明できた．同様にして，解は左側に $-\infty$ まで延長できることが分かる．一意性に関しては，局所解の一意性から容易に従う．以上により，命題 4 の証明が終わった．

以下で，主張 5 の証明について述べる．まず，$t \to t_m - 0$ の時，$\boldsymbol{\gamma}(t) \to (x^1(y), \ldots, x^n(y))$ であるから $|\boldsymbol{\gamma}|_E$ は有界である．また，計量テンソルが y の近傍で有界であることと $|\gamma'| \equiv 1$, $|M_i| \equiv 1$ により，$|\boldsymbol{\gamma}'|_E$, $|\boldsymbol{M}_i|_E$ も有界であることが分かる．証明の本質的部分は，$|\boldsymbol{\gamma}''|_E$, $|\boldsymbol{\gamma}'''|_E$ が有界であることを示す所である．計量テンソル，Christoffel 記号及びその微分が y の近傍で有界であることより，これを示すには次の補題を証明すれば十分であることが分かる．

補題 6. ある $C > 0$ が存在して，次が成立する．任意の $t \in [t_0, t_m)$ に対し，$|\nabla_t \gamma'|$, $|\nabla_t^2 \gamma'| \leq C$ が成り立つ．

補題の証明の概略を述べる．$|\nabla_t \gamma'|$ 及び $|\nabla_t^2 \gamma'|$ を直接評価するのは難しいので，これらを組み合わせた量を評価する．

まず，法接続 $\nabla^\perp$ の定義から，次の等式が容易に示せる．

$$|\nabla_t^2 \gamma'|^2 - \frac{3}{4}|\nabla_t \gamma'|^4 = |\nabla_t^\perp \nabla_t \gamma'|^2 + \frac{1}{4}|\nabla_t \gamma'|^4. \tag{4.2}$$

ここでは詳しい証明は省略するが，方程式 (2.2) が成り立つことと，曲率テンソルの有界性を用いると次の評価ができる．ある $C_1 > 0$ が存在して，任意の $t \in [t_0, t_m)$ に対し

$$\frac{d}{dt}\left(|\nabla_t^2 \gamma'|^2 - \frac{3}{4}|\nabla_t \gamma'|^4\right) \leq C_1 \left(|\nabla_t^2 \gamma'|^2 - \frac{3}{4}|\nabla_t \gamma'|^4\right) + C_1.$$

従って，ある $\alpha \geq 0$，$\beta \in \boldsymbol{R}$ が存在して，

$$|\nabla_t^2 \gamma'|^2 - \frac{3}{4}|\nabla_t \gamma'|^4 \leq \alpha e^{C_1 t} + \beta, \qquad {}^\forall t \in [t_0, t_m). \tag{4.3}$$

右辺は $[t_0, t_m)$ 上で有界であるから，左辺も有界である．つまりある $C_2 > 0$ が存在して，

$$|\nabla_t^2 \gamma'|^2 - \frac{3}{4}|\nabla_t \gamma'|^4 \leq C_2, \qquad {}^\forall t \in [t_0, t_m). \tag{4.4}$$

よって等式 (4.2) より，$|\nabla_t \gamma'|$ は $[t_0, t_m)$ 上有界となる．従って，(4.4) より，$|\nabla_t^2 \gamma'|$ も $[t_0, t_m)$ 上有界となり，補題 6 が証明された．以上により主定理の証明が終わった．

References

[1] S. S. Antman. Ordinary differential equations of nonlinear elasticity. II. Existence and regularity theory for conservative boundary value problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 61(4):353–393, 1976.

[2] S. S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*, volume 107 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] J. Arroyo, O. J. Garay, and J. J. Mencía. Extremals of curvature energy actions on spherical closed curves. *J. Geom. Phys.*, 51(1):101–125, 2004.

[4] E. A. Coddington and N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[5] J. Inoguchi and J.-E. Lee. Biminimal curves in 2-dimensional space forms. *Comm. Korean Math. Soc.*, 27:771–780, 2012.

[6] T. A. Ivey and D. A. Singer. Knot types, homotopies and stability of closed elastic rods. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 79(2):429–450, 1999.

[7] V. Jurdjevic. Integrable Hamiltonian systems on complex Lie groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 178(838):viii+133, 2005.

[8] S. Kawakubo. Global solutions of the equation of the Kirchhoff elastic rod in space forms. to appear in *Bull. Aust. Math. Soc.*

[9] S. Kawakubo. Kirchhoff elastic rods in a Riemannian manifold. *Tohoku Math. J. (2)*, 54(2):179–193, 2002.

[10] S. Kawakubo. Kirchhoff elastic rods in the three-sphere. *Tohoku Math. J. (2)*, 56(2):205–235, 2004.

[11] S. Kawakubo. Kirchhoff elastic rods in three-dimensional space forms. *J. Math. Soc. Japan*, 60(2):551–582, 2008.

[12] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[13] N. Koiso. Elasticae in a Riemannian submanifold. *Osaka J. Math.*, 29(3):539–543, 1992.

[14] J. Langer and D. A. Singer. Knotted elastic curves in $\mathbf{R}^3$. *J. London Math. Soc. (2)*, 30(3):512–520, 1984.

[15] J. Langer and D. A. Singer. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod. *SIAM Rev.*, 38(4):605–618, 1996.

[16] E. Loubeau and S. Montaldo. Biminimal immersions. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 51(2):421–437, 2008.

[17] A. E. H. Love. *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Dover Publications, New York, 1944. Fourth Ed.

[18] T. Popiel and L. Noakes. Elastica in SO(3). *J. Aust. Math. Soc.*, 83(1):105–124, 2007.