Invariant 理論と分類空間の位相

石黒　賢士 1)・工藤翔太郎 1)

（平成 22 年 11 月 30 日受理）

Invariant Theory and Topology of Classifying Spaces

Kenshi ISHIGURO[1] and Shotaro KUDO[1]

（Received November 30, 2010）

Abstract

This is a survey about the invariant theory of reflection groups and the topology of classifying spaces of compact Lie groups. It is well-known that the Weyl group of a compact connected Lie group is a reflection group, and that the rational cohomology of the classifying space is a ring of invariants, which is a polynomial ring. In the modular case, we will ask if rings of invariants are polynomial algebras, and if each of them can be realized as the mod p cohomology of a space. We will overview some historical background as well as recent developments of our subjects.

1　概要

1.1　Invariant 理論と多項式環

Invariant 理論は代数的にも位相的にも重要な研究分野であり, 多くの研究結果が得られている. ([17], [18], [22], [25] 参照) 研究対象は, 多項式環に対する群の作用を考えたとき, その作用で不変 (invariant) であるものである. 不変多項式の全体は環の構造を持ち, invariant ring と呼ばれている. たとえば, 対称群の置換作用による invariant ring は多項式環となることが知られている. 位相的にはコンパクト連結 Lie 群の分類空間の有理コホモロジー $H^*(BG;\mathbf{Q})$ が Weyl 群の作用による invariant ring で表される. 特に, 上述の対称群はユニタリー群の Weyl 群である.

整数 $\mathbf{Z}$ 上の多項式環 $\mathbf{Z}[t_1,t_2,\cdots,t_n]$ に対する対称群 Σ_n の置換作用を考える. 不変多項式の全体は環の構造を持ち, $\mathbf{Z}[t_1,t_2,\cdots,t_n]^{\Sigma_n}$ と表され, この invariant ring は基本対称式によって生成される多項式環となる. 一般の群の作用に対しては invariant ring が多項式環になるとは限らず複雑であるが, 対称群などの鏡映群（reflection group）の場合は色々と研究結果がある. たとえば,「複素数 $\mathbf{C}$ 上の invariant ring $\mathbf{C}[t_1,t_2,\cdots,t_n]^W$ が多項式環になるための必要十分条件は群 W

---

1) 福岡大学理学部応用数学科，〒 814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1
Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Fukuoka University, 8-19-1 Nanakuma, Jonan-ku, Fukuoka, 814-0180, Japan

の表現が pseudo–reflection 群となることである」という定理はよく知られている. 一般に, 体の標数が 0 か W の位数と互いに素である場合には invariant ring は多項式環となる. 更に, この条件のもと coinvariant ring がポアンカレ双対性を満たすことも invariant ring が多項式環となることを保証する, [18], [20]. ポアンカレ双対性についての最新の研究として, [9], [27] がある.

多項式環となるための必要条件について述べる, [3], [4], [22]. 「多項式環 $\Rightarrow$ hypersurface」 により,「invariant ring が多項式環であるならば, hypersurface である.」ということを意味するものとする. 次の結果が知られている：

多項式環 $\Rightarrow$ hypersurface $\Rightarrow$ complete intersection $\Rightarrow$ Gorenstein 環 $\Rightarrow$ Cohen–Macaulay 環

たとえば, 例外群 E_8 の分類空間の mod 2 コホモロジー $H^*(BE_8; \mathbf{F}_2)$ は Cohen–Macaulay 環ではないので多項式環ではないし, 他の性質も持たない, [29]. また, [5] によれば, G が連結であるとき, $H^*(BG; \mathbf{F}_2)$ が Cohen–Macaulay 環であることと Gorenstein 環であることとは同値である.

1.2 分類空間のコホモロジーと Steenrod の実現問題

G をコンパクト連結 Lie 群とすると, その分類空間 BG の有理コホモロジー $H^*(BG; \mathbf{Q})$ は Weyl 群 $W(G)$ による invariant ring $H^*(BT; \mathbf{Q})^{W(G)}$ と同型な多項式環である. また $\mathbb{F}_p$–係数コホモロジー $H^*(BG; \mathbb{F}_p)$ も G に p–torsion がなければ多項式環となる. たとえば, G がユニタリー群 $U(n)$ の場合を考える. $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbf{C}) \mid A \cdot A^* = E\}$ であるが, $H^*(BU(n); \mathbf{Z})$ は $H^*(BT^n; \mathbf{Z})$, すなわち $\mathbf{Z}[t_1, t_2, \cdots, t_n]$ における対称式の全体であり, 従って次が成り立つ.

$$H^*(BU(n); \mathbf{Z}) \cong H^*(BT^n; \mathbf{Z})^{W(U(n))} \cong \mathbf{Z}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^{\Sigma_n}$$

また, すべての素数 p に対し, $H^*(BU(n); \mathbb{F}_p) \cong H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^{W(U(n))}$ が成り立つことが知られている.

問題 1.1 (Steenrod)
多項式環 $\mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ に対し,

$$H^*(X; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

を満たす位相空間 X が存在するための条件を求めよ.

この問題は, コンパクト連結 Lie 群を含む有限ループ空間の研究にとって重要である. いまだ未解決であるが, 以下はこの分野で代表的な定理である.

定理 1.1 ([2], [10])
Steenrod 代数上の多項式環 H^* がある空間の mod p コホモロジー（p は奇素数）として実現されるならば, $H^* \cong H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^W$ となるような pseudo reflection 群 $W \hookrightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ が存在する.

定理 1.2 ([10])
Steenrod 代数上の多項式環 H^* の各生成元の次元が p と素であるとする. このとき,
$H^* \cong H^*(X; \mathbb{F}_p)$ となるような p–complete な空間がホモトピー一意的に存在する.

定理 1.3 ([10])

G をコンパクト連結 Lie 群, そして $(p, |W(G)|) = 1$ とする．もし p–complete な空間 X に対し $H^*(X;\mathbb{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ ならば, $X \simeq (BG)_p^\wedge$ である．

更に, 関連する著者の結果を述べる． まず, ファイバーを $\mathbf{Z}/n$ とする covering projection $SU(n) \longrightarrow PSU(n)$ を deloop して得られる写像 $BSU(n) \longrightarrow BPSU(n)$ を使って, n 次の対称群 Σ_n と同型である $W(SU(n))$ と $W(PSU(n))$ のそれぞれの p–adic 表現を比べると K-理論において次がわかる．

定理 1.4 ([11])

$W(SU(n))^*$ を $W(SU(n))$ の dual 表現とすると, $K(BPSU(n);\mathbf{Z}_p^\wedge) \cong K(BT^{n-1};\mathbf{Z}_p^\wedge)^{W(SU(n))^*}$ である．

次に, 位数 $4p$ の dihedral group $D_{4p} =< r, s \mid r^{2p} = s^2 = 1, srs = r^{-1} >$ に対し, p が奇素数の時, 次のように modular 表現 $\rho\ :\ D_{4p} \longrightarrow GL(2, \mathbf{F}_p)$ を定める．

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ただし, $2b + 1 = 0 \bmod p$ である．

定理 1.5 ([14])

この pseudo–reflection 群 D_{4p} に対し, 次が成り立つ．

(a) $H^*(BT^2;\mathbf{F}_p)^{\rho(D_{4p})} = \mathbf{F}_p[x_4, x_{4p}]$, ただし $x_4 = t_1^2$, $x_{4p} = \prod_{a=0}^{p-1}(at_1 + t_2)^2$.

(b) $H^*(BT^2;\mathbf{F}_p)^{\rho(D_{4p})} \cong H^*(BT^2;\mathbf{F}_p)^{\rho(D_{4p})^*}$, ただし $\rho(D_{4p})^*$ は $\rho(D_{4p})$ の *dual* 表現を表す．

定理 1.6 ([14])

$H^*(BT^2;\mathbf{F}_p)^{\rho(D_{4p})}$ は実現不可能である．

2 Invariant 理論

2.1 Reflection group と Invariant ring

2.1.1 鏡映群の定義

定義 2.1

V を体 $\mathbb{F}$ 上の n 次元のベクトル空間とする．線形写像 $\varphi : V \longrightarrow V$ が *reflection* (鏡映) とは，次の 2 つの性質をみたすことである．

(1) $\varphi^m = id$ となる自然数 m が存在する．

(2) 任意の U の元 x に対して，$\varphi(x) = x$ となる $(n-1)$ 次元部分ベクトル空間 U が存在する．

定義 2.2
一般線形群 $GL(V) = GL(n, \mathbb{F})$ の部分群 G が *reflection group* (鏡映群) であるとは，G が *reflection* によって生成された群であることをいう．

なお, $m = 2$ のときのみを reflection といい, 一般には pseudo–reflection と呼ぶこともあるが, これ以降すべて reflection (鏡映) と呼ぶこととする．

例 2.1

(1) 一般にコンパクト連結 *Lie* 群の *Weyl* 群 $W(G)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の reflection group である．たとえば，n 次の対称群 $\Sigma_n = W(U(n))$ は互換 $\{(i,\, i+1) \mid 1 \leqq i \leqq n-1\}$ によって生成されているからである．

(2) 二面体群 $D_{2n} = \langle r,\, s \mid r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$ は $\mathbb{R}$ 上で reflection group の構造をもつ．なぜなら，$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とすれば，$sr = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$ となり，D_{2n} は 2 つの reflection s と sr によって生成されるからである．ただし $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ とする．

次に，Invariant ring の代数的構造について考察する．有限群 G が体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に作用しているとする．すなわち，群 G は一般線形群 $GL(V)$ の部分群である．V の基底を $t_1, t_2, \cdots, t_n$ として，多項式環

$$S[V] = \mathbb{F}[t_1,\, t_2, \cdots,\, t_n] \quad \deg(t_i) = 2$$

を考える．G の作用は symmetric algebra $S[V]$ に拡張される．位相的には $S[V]$ はトーラス T^n の分類空間の $\mathbb{F}$–係数コホモロジー $H^*(BT^n; \mathbb{F})$ と同一視できる．この作用によって不変な元の全体を $S[V]^G$ で表す．すなわち

$$S[V]^G = \{x \in S[V] \mid gx = x \text{ for any } g \in G\}$$

とする．
ここで, [17, §20-3] を参照して Invariant 理論における基本的な定理を紹介する．

定理 2.1 (Hilbert)
$S[V]^G$ は有限生成である．

定理 2.2
G を $GL(V)$ の有限部分群とする．

(i) **(Chevalley)**
$S[V]^G$ が多項式環ならば，G は reflection group である．

(ii) **(Shephard-Todd)**
$ch(\mathbb{F}) = 0$ 又は $ch(\mathbb{F}) = p$ かつ $p \nmid |G|$ ならば，$S[V]^G$ が多項式環であることの必要十分条件は G が reflection group であることである．ただし $ch(\mathbb{F})$ は体 $\mathbb{F}$ の標数を表す．

(iii) $S[V]^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n], \deg(x_i) = 2d_i$ ならば，$|G| = d_1 d_2 \cdots d_n$ が成り立つ．さらに，$ch(\mathbb{F}) = 0$ の場合は G における reflection の数が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ である．

定理 2.3 (Coxeter-Steinberg)
$\mathbb{F}$ を標数 0 の体とする．$GL(n, \mathbb{F})$ の有限部分群 G が reflection group ならば，ヤコビアン J に関して，次が成り立つ．

$$J = \det\left[\frac{\partial x_i}{\partial t_i}\right] = c\prod_R L_i^{r_i - 1}$$

ただし c を 0 でない $\mathbb{F}$ の適当な元とし，R を G における reflection{ φ_i } の全体，L_i を φ_i の reflecting hyperplane，r_i を φ_i の位数とする．

例 2.2
$\mathbb{F}$ を実数体 $\mathbb{R}$ とし, $GL(3, \mathbb{R})$ の部分群 $G = \Sigma_3$ を考える．

$$\mathbb{R}[t_1, t_2, t_3]^{\Sigma_3} = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$$

ただし，$x_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $x_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$, $x_3 = t_1t_2t_3$ である．ここでヤコビアン J は

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_2 + t_3 & t_1 + t_3 & t_1 + t_2 \\ t_2t_3 & t_1t_3 & t_1t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_2 + t_3 & t_1 - t_2 & t_1 - t_3 \\ t_2t_3 & (t_1 - t_2)t_3 & (t_1 - t_3)t_2 \end{vmatrix} = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3)$$

一方，Σ_3 における reflection は

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, この場合 $c = 1$, $L_1 = t_1 - t_2$, $L_2 = t_1 - t_3$, $L_3 = t_2 - t_3$, $r_1 - 1 = 1$, $r_2 - 1 = 1$, $r_3 - 1 = 1$ となっている．

2.1.2　Reflection の canonical from

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ の場合 (位数 2 のみ)
有限群 G が一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群であるとする．$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対してその内積を $\langle x, y\rangle'$ で表す．そして positive definite from を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{g\in G}\langle gx, gy\rangle'$$

と定義する．$\varphi \in G$ を reflection とすると G-invariant

$$\langle x, y\rangle = \langle\varphi(x), \varphi(y)\rangle$$

が成り立つ．

任意の $x \in L$ に対して，$\varphi(x) = x$ となる hypreplane L が存在し，また $\varphi(\alpha) = -\alpha$ となる $\alpha \in \mathbb{R}^n$ が存在する．このとき，$\langle \alpha, L \rangle = 0$ である．
したがって，$x \in V$ に対して

$$\varphi(x) = x - \frac{2\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

が成り立つ．

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ の場合 (一般の位数 m)

$$\varphi(x) = x - (1 - \zeta_m)\frac{\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$$

ただし，$\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ である．

以上より，reflection は位数と reflecting hyperplane によって完全に決定される．

2.2 Non–modular 表現

2.2.1 Coxeter group

二面体群 D_{2n} を

$$D_{2n} = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^n = 1 \rangle$$

と表す．ただし，$s_1 = s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $s_2 = sr = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$ である．

定義 2.3
W が *Coxeter group* であるとは

$$W = \langle s_i \in S \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$$

と表されることである．ただし，S は集合で次の条件をみたす

(i) $m_{ii} = 1$

(ii) $m_{ij} \in \{2, 3, \cdots\} \cup \{\infty\}$　ならば　$i \neq j$

また, (W, S) を Coxeter system という．

定理 2.4 (Coxeter)
G を有限群とする．このとき G が Coxeter group である必要十分条件は，G が $\mathbb{R}$ 上の reflection group であることである．

Prop 2.1
Coxeter system が既約である必要十分条件は，Coxeter グラフが連結であることである．

2.2.2 Weyl 群

Reflection group の重要な例として Weyl 群がある，ユニタリー群 $U(n)$ などのコンパクト連結 Lie 群 G に対して

$$T_G = T = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$$

をその極大トーラス，$N(T) = \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$ を nomalizer とする．このとき，T は $N(T)$ の正規部分群となり Wely 群 $W(G)$ はその商群として定義される．

単純 Lie 群の局所同形類は古典群と呼ばれる A_n型, B_n型, C_n型, D_n型 と例外群 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の 5 種類である．それぞれの Weyl 群は既約な有限 Coxeter 群である．

$$\begin{aligned}
S[V]^{W(A_n)} &= \mathbb{R}[x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}] \\
S[V]^{W(B_n)} = S[V]^{W(C_n)} &= \mathbb{R}[x_2, x_4, \cdots, x_{2n}] \\
S[V]^{W(D_n)} &= \mathbb{R}[x_2, x_4, \cdots, x_{2n-2}, x]\ \text{,ただし}\ x = t_1 t_2 \cdots t_n \\
S[V]^{W(G_2)} &= \mathbb{R}[x_4, x_{12}] \\
S[V]^{W(F_4)} &= \mathbb{R}[x_4, x_{12}, x_{16}, x_{24}] \\
S[V]^{W(E_6)} &= \mathbb{R}[x_4, x_{10}, x_{12}, x_{16}, x_{18}, x_{24}] \\
S[V]^{W(E_7)} &= \mathbb{R}[x_4, x_{12}, x_{16}, x_{20}, x_{24}, x_{28}, x_{36}] \\
S[V]^{W(E_8)} &= \mathbb{R}[x_4, x_{16}, x_{24}, x_{28}, x_{36}, x_{40}, x_{48}, x_{60}]
\end{aligned}$$

2.2.3 Complex and p–adic reflection groups

複素鏡映群について Shephard–Todd の分類定理を用い, Clark–Ewing [6] は p–adic 鏡映群の分類定理を得た.

定理 2.5 (Shephard–Todd の分類定理)
有限群の既約な複素鏡映群は 37 タイプあり, そのうちの 3 つは $\{\mathbf{Z}/n\}$, $\{\Sigma_n\}$, $\{G(m,p,n)\}$ と表される ∞ − family である.

定理 2.6 ([6])
任意の p–adic reflection group $\rho\ :\ G \longrightarrow GL(n, \mathbf{Q}_p^\wedge)$ に対し, 同じ character をもつ複素表現 $\sigma\ :\ G \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$ が存在する.

定理 2.7 ([6])
有限群 G が p–adic reflection group となるような表現をもつための必要十分条件は次の 2 つである.

(i) G が reflection group となるような複素表現 $\rho\ :\ G \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$ をもつ.

(ii) $\mathbf{Q}(\chi) \subset Q_p^\wedge$

2.3 Modular 表現

有限体 $\mathbb{F}_p$ 上での表現 $\rho\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{F}_p)$ を考える．これを一般に modular 表現という．表現論において, 複素表現はよく理解されているが, modular 表現については余りよくわかっていないことも多い. 鏡映群についても同様で, 分類定理は得られていない.

Lemma 2.1 ([17])
$(|G|, p) = 1$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) 任意の表現 $\rho\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{F}_p)$ に対し, lifting $\hat{\rho}\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ が存在する.

(ii) $\rho_1 \cong \rho_2$ ならば, $\hat{\rho}_1 \cong \hat{\rho}_2$ である.

Lemma 2.2 ([17])
$(|G|, p) = 1$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) $\mathbb{Q}_p^\wedge$ 上の表現 $\sigma\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{Q}_p^\wedge)$ は $\mathbb{Z}_p^\wedge$ 上の表現 $\hat{\sigma}\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ に reduce できる.

(ii) $\sigma_i \sim \hat{\sigma}_i$, $(i = 1, 2)$ かつ $\sigma_1 \cong \sigma_2$ ならば, $\hat{\sigma}_1 \cong \hat{\sigma}_2$ である.

定理 2.8 ([6])
$(|G|, p) = 1$ とする．G が　mod p reflection group となる表現をもつ必要十分条件は G が $\mathbb{Q}_p^\wedge$–reflection group となる表現をもつことである.

Prop 2.2 ([17])
$(\ |G|\ , p) = 1$ とする．$\hat{\rho}\colon G \longrightarrow GL(n, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ に対し, 射影:$\mathbb{Z}_p^\wedge \longrightarrow \mathbb{F}_p$ 及び $\mathbb{Z}_p^\wedge \hookrightarrow \mathbb{Q}^\wedge$ より $\mathbb{F}_p$ 上及び $\mathbb{Q}_p^\wedge$ 上の表現が誘導される．このとき，次の 3 つは同値である.

(i) $\mathbb{Z}_p^\wedge[t_1, t_2, \cdots, t_n]^G = \mathbb{Z}_p^\wedge[x_1, x_2, \cdots, x_n]$

(ii) $\mathbb{F}_p[t_1, t_2, \cdots, t_n]^G = \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$

(iii) $\mathbb{Q}_p^\wedge[t_1, t_2, \cdots, t_n]^G = \mathbb{Q}_p^\wedge[x_1, x_2, \cdots, x_n]$

3 分類空間のコホモロジー

分類空間 BG のホモトピー論の研究は 80 年代より飛躍的に発展している分野である．コホモロジーによる特徴付けなど, 70 年代は主に代数的であったその分野の研究が, 80 年代に入り H. Miller [21] が Sullivan Conjecture を証明して以来, Lannes の結果等 [19] を合わせて幾何学的方面での重要な結果が数多く得られた．その中で, Dwyer–Miller– Wilkerson の結果, 及び Jackowski–McClure–Oliver の結果は代表的である．そして 90 年代に入り p-compact 群という概念が導入され代数的手法と幾何学的手法の融合が為された．すなわち, ホモトピー論的手法による Lie 群論の一般化である．尚, 分類空間についてのガイドブックとして [23] がある.

定理 3.1 ([21])
局所有限群 π と有限 CW–複体 X に対し, 次の写像 (evaluation map) $map(B\pi, X) \longrightarrow X$ は weak equivalence である.

空間 X に群 π が作用しているとする. このとき homotopy fixed point set$X^{h\pi}$ は $E\pi$(free contractible π–space) から X への π–写像の全体として定義される. すなわち $X^{h\pi} = map_\pi(E\pi, X)$ であり, 特に π が自明に作用するときは $X^{h\pi} = map(B\pi, X)$ となる. 不動点集合 X^π から $X^{h\pi}$ への自然な写像が与えられる. 空間 X の p–completion [B–K] を $X_p^\wedge$ で表わすと, 特に π が有限 p–群の時, 次の結果が得られる.

定理 3.2 ([21])
有限 CW–複体 X が π– space で π が有限 p–群ならば写像 $(X^\pi)_p^\wedge \longrightarrow (X_p^\wedge)^{h\pi}$ はホモトピー同値である.

Steenrod 代数を A_p で表わすと, elementary p–abelian group V に対し Lannes' T–functor T_V は次のような adjoint functor として定義される.

$$Hom_{A_p}(M, H^*(BV; \mathbf{F}_p) \otimes N) = Hom_{A_p}(T_V(M), N)$$

ここで M と N は A_p 上の module 又は algebra とする.

定理 3.3 ([19])

1. 空間 X は nilpotent で $H^*(X; \mathbf{F}_p)$ が finite type かつ $\pi_1(X)$ が有限とする. このとき自然な写像
$$[BV, X] \longrightarrow Hom_{A_p}(H^*(X; \mathbf{F}_p), H^*(BV; \mathbf{F}_p))$$
は bijection である.

2. もし $T_V(H^*(X; \mathbf{F}_p))$ が finite type で 1 次元において自明ならば, 次が成り立つ.
$$T_V(H^*(X; \mathbf{F}_p)) \cong H^*(map(BV, X_p^\wedge); \mathbf{F}_p)$$

3.1 コンパクト Lie 群 G とその分類空間 BG

実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$, 四元数体 $\mathbb{H}$ 上の n 次正則行列のつくる群（一般線形群）は位相群である.

$$GL(n, \mathbb{R}), \quad GL(n, \mathbb{C}), \quad GL(n, \mathbb{H})$$

一般線形群および直交群, ユニタリー群, シンプレクティック群などの部分群が次のように表わされる. ただし E は単位行列を表す.

$$
\begin{aligned}
GL(n,\mathbb{R}) &= \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \text{det A} \neq 0\} \\
O(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A \cdot {}^tA = E\} \\
SO(n) &= \{A \in O(n) \mid \text{det A} = 1\} \\
GL(n,\mathbb{C}) &= \{A \in Mat_n(\mathbb{C}) \mid \text{detA} \neq 0\} \\
U(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = E\} \\
SU(n) &= \{A \in U(n) \mid \text{det A} = 1\} \\
GL(n,\mathbb{H}) &= \{A \in Mat_n(\mathbb{H}) \mid A \text{ は正則行列 }\} \\
Sp(n) &= \{A \in GL(n,\mathbb{H}) \mid A \cdot A^* = E\}
\end{aligned}
$$

一般線形群はコンパクト空間ではないが, 特殊直交群, ユニタリー群, シンプレクティック群などはコンパクト連結 Lie 群の重要な例である. 極大トーラスや Weyl 群, また Lie 群と Lie 環の関係などから単純 Lie 群は完全に分類されている.

定理 3.4
単純 *Lie* 群の局所同型類は古典群とよばれる A 型, B 型, C 型, D 型 のものと例外群とよばれる G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の 5 種類である.

コンパクト Lie 群 G に対し, その分類空間 BG は G が自由に作用する可縮な空間 EG による軌道空間 EG/G として表わされる (Milnor Construction). それゆえに $G \longrightarrow EG \longrightarrow BG$ なる fibration よりループ空間 ΩBG は G とホモトピー同値である. これは G が有限ループ空間であることを示す. コンパクト Lie 群と有限ループ空間との違いは存在するが, 今までの多くの結果からその違いは極めて小さいと考えられる. しかしながら完全な解決には至っていない. 分類空間 BG は principal G-bundle を分類する. すなわち, 位相空間 X に対しホモトピー集合 $[X, BG]$ は X を軌道空間としてもつ自由 G-空間の同値類に 1 対 1 対応する.

3.2 多項式環とコホモロジー

§1.2 で次の定理を紹介した.

定理 3.5 ([10])
G をコンパクト連結 Lie 群, そして $(p, |W(G)|) = 1$ とする. もし p–complete な空間 X に対し $H^*(X;\mathbb{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ ならば $X \simeq (BG)^\wedge_p$ である.

ここで $G = S^3$ の時, すなわち $H^*(X;\mathbf{F}_p) \cong H^*(BS^3;\mathbf{F}_p)$ そして p が奇素数ならば $X \simeq (BS^3)^\wedge_p$ であることの証明の概略を示す. 一般に p が $|W(G)|$ を割らないならば $(BNT)^\wedge_p \simeq (BG)^\wedge_p$ だから $X \simeq (BNS^1)^\wedge_p$ を示せばよい. Lannes の結果より

$$[B\mathbf{Z}/p, X] = Hom_{A_p}(H^*(X;\mathbf{F}_p), H^*(B\mathbf{Z}/p;\mathbf{F}_p))$$

$$= Hom_{A_p}(H^*(BS^3; \mathbf{F}_p), H^*(B\mathbf{Z}/p; \mathbf{F}_p)) = [B\mathbf{Z}/p, BS^3]$$

従って単射 $i : \mathbf{Z}/p \hookrightarrow S^3$ より誘導された写像 $Bi : B\mathbf{Z}/p \longrightarrow BS^3$ に対応する写像 $f : B\mathbf{Z}/p \longrightarrow X$ がえられる. この写像は $B\mathbf{Z}/p \longrightarrow map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \longrightarrow X$ と分解される. mapping space のコホモロジーを計算すると,

$$H^*(map(B\mathbf{Z}/p, X)_f; \mathbf{F}_p) = T(H^*(X; \mathbf{F}_p))_f$$
$$= T(H^*(BS^3; \mathbf{F}_p))_{Bi} = H^*(BS^1; \mathbf{F}_p)$$

よって $map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \simeq (BS^1)^{\wedge}_p$ である. ここで $\mathbf{Z}/2$ が $\mathbf{Z}/p$ には (-1) 倍としてまた X には自明に作用するとき

$$E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \longrightarrow E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} X \longrightarrow X$$

を得る. 以上より $X \simeq E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \simeq (BNS^1)^{\wedge}_p \simeq (BS^3)^{\wedge}_p$ となる.

特に W として $GL(n, \mathbf{F}_p)$ を取ったとき, すなわち, $H^*(BT^n; \mathbf{F}_p)^{GL(n,\mathbf{F}_p)}$ または $H^*(B(\mathbf{Z}/2)^n; \mathbf{F}_2)^{GL(n,\mathbf{F}_2)}$ で表わされる多項式環を Dickson algebra と言う. [28] により, ほとんどの場合実現不可能であるので, 次は特異な例となる.

定理 3.6 ([7])
次を満たす空間 X が存在する.

$$H^*(X; \mathbf{F}_2) \cong H^*(B(\mathbf{Z}/2)^4; \mathbf{F}_2)^{GL(4,\mathbf{F}_2)}$$

この結果を用いると $H^*(B(\mathbf{Z}/2)^n; \mathbf{F}_2)^{GL(n,\mathbf{F}_2)}$ が実現可能であるための必要十分条件は $n \leq 4$ であることが示される.

3.3 分類空間上の写像と admissible map

準同型 $\rho : K \longrightarrow G$ は分類空間上の写像 $B\rho : BK \longrightarrow BG$ を誘導する. しかし全ての写像が準同型によって誘導されるとは限らない. unstable Adams operation はその例である. また, たとえば, ホモトピー集合 $[BD_{2p}, BS^3]$ は $p+1$ 個の元から成る. 写像 $BK \longrightarrow BG$ のコホモロジー論的研究は 70 年代に確立された. Adams–Mahmud は $\mathbf{Q}$–コホモロジーを用いて admissible map という概念を導入して特徴付けを行った.

定理 3.7 ([1])
K と G をコンパクト連結 Lie 群とし, それぞれの極大トーラスを T_K そして T_G とする. 任意の写像 $BK \longrightarrow BG$ に対し, トーラス間の準同型 $\alpha : T_K \longrightarrow T_G$ が存在し, 次のホモトピー可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd} BT_K \arrow[r, "B\alpha"] \arrow[d] & BT_G \arrow[d] \\ BK \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

更に, $\beta : T_K \longrightarrow T_G$ もまたそのような準同型ならば G の Weyl 群のある元 w に対し $\beta = w \cdot \alpha$ となる.

ここで $R = \mathbf{Q}$ または $\mathbf{F}_p$ に対し $H^*(BK;R) = H^*(BT_K;R)^{W(K)}$ 及び $H^*(BG;R) = H^*(BT_G;R)^{W(G)}$ とする. $\phi = (B\alpha)^*$ とおくと任意の $w \in W(K)$ に対し $w' \in W(G)$ が存在して $w\phi = \phi w'$ となる. このような準同型を admissible map と言う.

$$\begin{tikzcd} H^*(BT_G;R) \arrow[r, "\phi"] & H^*(BT_K;R) \\ H^*(BG;R) \arrow[r] \arrow[u] & H^*(BK;R) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

3.4 Invariant ring と p-compact 群

Lie 群 G の群論的構造を分類空間 BG のホモトピー論的構造で表わす有効な方法として p–compact 群という概念が Dwyer–Wilkerson [8] によって導入された. ループ空間 X が p–compact 群とは X が $\mathbf{F}_p$–finite であり, かつ BX が $\mathbf{F}_p$–complete であるときを言う. p–compact 群は極大トーラス T_X と Weyl 群 W_X をもち, それらは Lie 群の場合と似た性質をもつ. もちろんコンパクト Lie 群 G が連結なら, その p–completion は p–compact 群であるが, 一般に $\pi_0(G)$ が有限 p–群でなければ p–compact 群であるとは限らない, [12] および [13]. Lie 群以外の p–compact 群の例としては $(S^{2n-1})^\wedge_p$, $(p-1 \equiv 0 \ \ mod\, n)$ などのいわゆる Clark–Ewing タイプ [6] のものが挙げられる.

ここで p-compact 群と Lie 群論の基本的な対応を示す.

1. 準同型 $f : X \longrightarrow Y$ は写像 $Bf : BX \longrightarrow BY$ のことである.
2. ２つの準同型 $f, g : X \longrightarrow Y$ が共役とは写像 Bf と Bg がホモトピー同値であること.
3. 準同型 $f : X \longrightarrow Y$ が単射（すなわち X は Y の部分 p–compact 群）とは写像 Bf のホモトピーファイバー X/Y が $\mathbf{F}_p$–finite であること.

さらに p–compact 群は極大トーラスと Weyl 群 W_X をもち Lie 群の場合と似た性質をもつ. p–compact 群 T が p–compact トーラスであるとは T が Eilenberg–MacLane 空間 $K((\mathbf{Z}^\wedge_p)^n, 1)$ とホモトピー同値であることを言う. また p–compact 群 X が toral とは X_0 が p–compact トーラスであることを言う. 単射 $f : T \longrightarrow X$ が極大トーラスであるとは $C_X(T) := map(BT, BX)_{Bf}$ が p–compact toral 群でかつ $C_X(T)/T$ が homotopically discrete となることを言う.

定理 3.8 ([8])
p–compact 群 X は極大トーラスと Weyl 群 W_X をもち, ２つの極大トーラスは共役である.

定理 3.9 ([8])
$T_X \longrightarrow X$ を階数 n の極大トーラスとすると次は同値である.

1. Weyl 群 W_X の位数は X/T_X の Euler characteristic に等しい.

2. BT_X 上の W_X– action は faithful な表現

$$W_X \longrightarrow GL(H^*(BT_X;\mathbf{Z}_p^\wedge)\otimes\mathbf{Q}) \cong GL(n,\mathbf{Z}_p^\wedge)$$

   を誘導する. このとき W_X は reflection group として表現される.

3. $H^*(BX;\mathbf{Z}_p^\wedge)\otimes\mathbf{Q} \quad\longrightarrow\quad (H^*(BT_X;\mathbf{Z}_p^\wedge)\otimes\mathbf{Q})^{W_X}$ は同型である.

ここでコンパクト Lie 群 G に対し, $(BG)_p^\wedge$ のループ空間が p–compact 群であるための条件について考える. たとえば, p–compact toral 群となるための必要十分条件は G が p–nilpotent であることである. この場合, G の連結成分はトーラスとなる. 一般に, p–compact 群であるための必要条件として次が得られる.

定理 3.10 ([12])
G をコンパクト Lie 群とする. $(BG)_p^\wedge$ のループ空間が p–compact 群であるならば次が成り立つ.

(a)　π_0G は p–nilpotent である.

(b)　$\pi_1((BG)_p^\wedge)$ が π_0G の p–Sylow 群と同型である.

更に, p が $\pi_0(G)$ の位数を割らないとき, 明らかな必要条件として有理係数コホモロジーに関するものがある. すなわち, $H^*(BG;\mathbf{Q}_p^\wedge)$ は多項式環となり,

$$H^*(BG;\mathbf{Q}_p^\wedge) \cong H^*(BT^n;\mathbf{Q}_p^\wedge)^W$$

となるような reflection 群 $W \hookrightarrow GL(n,\mathbf{Z}_p^\wedge)$ が存在する. 以上の条件を満たすが, p–compact 群にならない例が G_2 の部分群の商群を用いて $p=3$ のときに得られる.

例外 Lie 群 G_2 は $H = SU(3)\rtimes\mathbf{Z}/2$ を部分群として含む. 分類空間 $(BH)_3^\wedge$ は $(BG_2)_3^\wedge$ にホモトピー同値である. ところで, $SU(3)$ の center は $\mathbf{Z}/3$ に同型であるが, H の正規部分群となっている. 従って, 商群 $\Gamma_2 = H/(\mathbf{Z}/3)$ が定義できる. 分類空間 $(B\Gamma_2)_3^\wedge$ は $(BG_2)_3^\wedge$ に有理ホモトピー同値である.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}/3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbf{Z}/3 \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
SU(3) \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}/2 \arrow[d, equal] \\
PU(3) \arrow[r] & \Gamma_2 \arrow[r] & \mathbf{Z}/2
\end{tikzcd}$$

定理 3.11 ([12])
$(B\Gamma_2)_3^\wedge$ のループ空間は 3–compact 群ではない.

コンパクト連結 Lie 群 G の極大トーラスを T とすると, 分類空間 BG の p–adic K–theory は $K(BG;\mathbf{Z}_p^\wedge)\cong K(BT;\mathbf{Z}_p^\wedge)^{W(G)}$ である. 局所同型な Lie 群 G と K に対し, Weyl 群 $W(G)$ と $W(K)$ の表現は $\mathbf{Q}_p^\wedge$ 上においては同値であるが $\mathbf{Z}_p^\wedge$ 上で同値であるとは限らない. また, $W(G_2)^*$ を $W(G_2)$ の dual 表現とすると $K(B\Gamma_2;\mathbf{Z}_3^\wedge)\cong K(BT^2;\mathbf{Z}_p^\wedge)^{W(G_2)^*}$ である.

射影 $\mathbf{Z}_p^\wedge \longrightarrow \mathbf{F}_p$ により $W(G)$ の p–adic 表現はその modular 表現を与える. その結果, たとえば unstable algebra $H^*(BT^{n-1};\mathbf{F}_p)^{W(SU(n))^*}$ を得る. もし p が n を割り $n\geq 3$ ならば $H^*(BT^{n-1};\mathbf{F}_p)^{W(SU(n))^*}$ は invariant vector を持つ. もちろん, dual 表現を取らなければ $H^*(BT^{n-1};\mathbf{F}_p)^{W(SU(n))}$ は $H^*(BSU(n);\mathbf{F}_p)$ と同型であるから invariant vector は持たない. また, $H^*(BT^2;\mathbf{F}_3)^{W(SU(3))^*}$ と同型となる mod 3 コホモロジーをもつ空間は存在しない. ここで, $SU(3)$ を G_2 で置き換えると状況は異なる. すなわち, $H^*(BT^2;\mathbf{F}_3)^{W(SU(3))}$ と $H^*(BT^2;\mathbf{F}_3)^{W(SU(3))^*}$ は同型にならないが, G_2 の場合は

$$H^*(BT^2;\mathbf{F}_3)^{W(G_2)^*}\cong H^*(BT^2;\mathbf{F}_3)^{W(G_2)}$$

となる. これは $\mathbf{F}_3$ 上の表現として異なるが invariant ring として同型になる例である.

定理 **3.12 ([12])**

1. $K(B\Gamma_2;\mathbf{Z}_3^\wedge)$ は $K(BG_2;\mathbf{Z}_3^\wedge)$ に同型である.
2. 空間 $(B\Gamma_2)_3^\wedge$ から $(BG_2)_3^\wedge$ へのホモトピー集合は自明である.

コンパクト Lie 群 G に対し, $(BG)_p^\wedge$ のループ空間が p–compact 群であるとき, BG が p–compact であると呼ぶ. 素数全体の集合を $\mathbf{\Pi}$ とし, $\mathbb{P}$ をその空でない部分集合とする. BG が $\mathbb{P}$–compact であるとは, $\mathbb{P}$ に属する任意の素数 p に対し, BG が p–compact であることと定義する. G が連結ならば $\Omega(BG)_p^\wedge\simeq(G)_p^\wedge$ だから, BG は $\mathbf{\Pi}$–compact である. 一方, 連結でなくても, たとえば直交群 $O(n)$ の分類空間は $\mathbf{\Pi}$–compact である. そこで, BG が $\mathbb{P}$–compact であるための条件について考える. 関連する具体例をみると, $\mathbb{P}(BG)$ を BG が p–compact であるような素数 p の全体の集合と定義するとき, G が単純 Lie 群 K の極大トーラス T の noramlizer NT の場合には, 次が成り立つ.

$$\mathbb{P}(BNT)=\begin{cases}\{p\in\mathbf{\Pi}\mid |\mathrm{W(K)}|\not\equiv 0 \text{ mod p}\}\cup\{2\} & \text{if } W(K) \text{ is a 2–group}\\ \{p\in\mathbf{\Pi}\mid |\mathrm{W(K)}|\not\equiv 0 \text{ mod p}\} & \text{otherwise}\end{cases}$$

ただし, $|W(K)|$ は Weyl 群の位数を表す. また, 別の例が例外 Lie 群 G_2 と関連して得られる. G_2 は $H=SU(3)\rtimes\mathbf{Z}/2$ を部分群として含む. $SU(3)$ の center は $\mathbf{Z}/3$ に同型であるが, H の正規部分群となっている. 従って, 商群 $\Gamma_2=H/(\mathbf{Z}/3)$ が得られる. このとき, $\mathbb{P}(BH)=\mathbf{\Pi}$ および $\mathbb{P}(B\Gamma_2)=\mathbf{\Pi}-\{3\}$ が成り立つ.

まずは特別な場合を調べる. BG が $\mathbb{P}$–compact toral であるとは, $\mathbb{P}$ に属する任意の素数 p に対し, $\Omega(BG)_p^\wedge$ が p–compact torus と有限 p–群との extension と表されることと定義する. $\mathbb{P}=\{p\}$ のときの結果の応用として次が得られる.

定理 3.13 ([13])
コンパクト Lie 群 G に対し, G_0 を単位元を含む連結成分とする. BG が $\mathbf{\Pi}$–compact toral であるための必要十分条件は次の 2 つの条件が成り立つことである.
(a) G_0 はトーラスであり, 有限群 $\pi_0 G$ は nilpotent である.
(b) G_0 は G の central subgroup である.

トーラス T と有限 nilpotent 群 γ に対し, $G = T \times \gamma$ は上の条件 (a) と (b) を満たすので, BG は $\mathbf{\Pi}$–compact toral である. しかしながら, $\mathbf{\Pi}$–compact toral であるが, $G = T \times \gamma$ でない例がある.
次に, 単純 Lie 群 G の閉部分群 H に対し, BH が $\mathbb{P}$–compact であるための条件について考える. $\mathbb{P} = \mathbf{\Pi}$ のとき, (G, H_0) のタイプが次の結果によって与えられる.

定理 3.14 ([13])
H を単純コンパクト Lie 群 G の閉部分群で, $H \neq G$, $rank(H_0) = rank(G)$, そしてある素数 p に対し写像 $Bi : BH \longrightarrow BG$ が mod p ホモトピー同値となるものとする.
このとき, 次が成り立つ.
(a) BH が $\mathbf{\Pi}$–compact ならば, (G, H_0) は次のいずれかである.

$$(G, H_0) = \begin{cases} (G, T_G) & \text{for } G = A_1 \ \text{ or } \ B_2 (= C_2) \\ (B_n, D_n) & \\ (C_2, A_1 \times A_1) & \\ (G_2, A_2) & \end{cases}$$

(b) p が奇素数ならば, すべてのタイプは適当な G と H によって実現可能である. $p = 2$ のときは, どんな (G, H) も仮定の条件を満たさない.

定理 3.15 ([13])
(G, H) が前の定理の仮定条件を満たすとする. H の有限正規部分群 ν に対し $\Gamma = H/\nu$ とするとき, $(G, H_0) \neq (G_2, A_2)$ ならば $B\Gamma$ は $\mathbf{\Pi}$–compact である.

4　Invariant rings と位相

4.1　System of parameters

定理 4.1 ([25], Proposition 5.5.5)
G を $GL(V)$ の部分群で $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ とする. $f_1, f_2, \cdots, f_n \in S[V]^G$ を system of parameters とし, $\prod_{i=1}^{n} \deg(f_i) = |G|$ ならば $S[V]^G \cong \mathbb{F}[f_1, f_2, \cdots, f_n]$ が成り立つ.

Prop 4.1
$f_1, f_2, \cdots, f_n \in S[V]^G$ が system of parameters であることと

$$\begin{cases} f_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \\ f_2(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ f_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ならば} \quad t_i = 0$$

であることは同値である.

例 **4.1**
$GL(3, \mathbb{R})$ の部分群 $G = \Sigma_3$ を考える.

$$\begin{cases} f_1(t_1,\, t_2,\, t_3) = t_1 + t_2 + t_3 = 0 \\ f_2(t_1,\, t_2,\, t_3) = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0 \\ f_3(t_1,\, t_2,\, t_3) = t_1t_2t_3 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと, $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ となり f_1, f_2, f_3 は system of parameters である.

4.2 二面体群などの双対表現

射影 $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{F}_p$ により $W(G)$ の $\mathbf{Z}$ 上表現はその modular 表現を与える. dual 表現に対し, invariant ring を比較すると invariant vector を持つ $H^*(BT^{n-1}; \mathbf{F}_p)^{W(SU(n))^*}$ は $H^*(BT^{n-1}; \mathbf{F}_p)^{W(SU(n))}$ とは同型ではない. ここで, $p = 3$ とし, 例外群 G_2 の場合を考えると状況は異なる. すなわち, $H^*(BT^2; \mathbf{F}_3)^{W(G_2)^*} \cong H^*(BT^2; \mathbf{F}_3)^{W(G_2)}$ となり, これは $\mathbf{F}_3$ 上の表現として異なるが invariant ring として同型になる例である. Weyl 群 $W(G_2)$ は位数 12 の二面体群 D_{12} であり, $W(SU(3)) = D_6 = \Sigma_3$ である. Wilkerson の結果 [25, §5.6] に二面体群 D_{2p} に関するものがある. ここでは, D_{4p} への一般化を考える. $D_{4p} =< r, s \mid r^{2p} = s^2 = 1, srs = r^{-1} >$ に対し, p が奇素数の時, §1.2 で modular 表現 ρ についての結果を示した.

また, $p = 2$ の場合は, 2 次の modular 表現は不可能であるが, 3 次の unipotent 群としての表現 ρ により同様の議論が可能となる. $D_8 =< r, s \mid r^4 = s^2 = 1, srs = r^{-1} >$ に対し, 次のように modular 表現を定める.

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

定理 **4.2 ([14])**
この reflection 群 D_8 に対し, 次が成り立つ.
(a) $H^*(BT^3; \mathbf{F}_2)^{\rho(D_8)} = \mathbf{F}_2[x_2, x_4, x_8]$, ただし $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2(t_1 + t_2)$,
$x_8 = t_3(t_1 + t_3)(t_2 + t_3)(t_1 + t_2 + t_3)$.
(b) $H^*(BT^3; \mathbf{F}_2)^{\rho(D_8)} \cong H^*(BT^3; \mathbf{F}_2)^{\rho(D_8)^*}$
(c) $H^*(BT^3; \mathbf{F}_2)^{\rho(D_8)}$ は実現不可能である.

関連する結果を表にすると, 次のとおりである. 尚, 適当な p と m に対し, $S(V) = H^*(BT^m; \mathbf{F}_p) = \mathbf{F}_p[t_1, t_2, \cdots, t_m]$ とする.

W	$S(V)^W \cong S(V)^{W^*}$	多項式環	実現可能性
$D_6 = \Sigma_3$	×	○	○
D_6^*	×	○	×
$D_{2p}\ (p \geq 5)$	×	○	×
$D_{2p}^*\ (p \geq 5)$	×	○	×
D_{12}	○	○	○
$D_{4p}\ (p \geq 5)$	○	○	×
D_8	○	○	×
$\Sigma_p\ (p \geq 5)$	×	○	○
$\Sigma_p^*\ (p \geq 5)$	×	×	×

$W_{n,d} = W(SU(n)/\mathbf{Z}_d)$ とすると, 対称群 Σ_n と群のレベルでは同じであるが, $\mathbf{Z}$–表現は異なる. 従って, それらの作用による invariant ring も異なる構造をもつ可能性がある. 最近, 次のような結果が得られた.

定理 4.3
$H^*(BT^3; \mathbf{F}_2)^{W_{4,4}}$ は多項式環である.

参考文献

[1] **J.F. Adams and Z.Mahmud**, *Maps between classifying spaces* , Inventiones Math., 35, 1976, 1–41

[2] **J.F. Adams and C.W. Wilkerson**, *Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra*, Ann. of Math. 111(2), 1980, 95–143

[3] **D.J. Benson**, *Representations and cohomology. II. Cohomology of groups and modules*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 31. Cambridge University Press, Cambridge, 1991

[4] **D.J. Benson**, *Polynomial invariants of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 190. Cambridge University Press, Cambridge, 1993

[5] **D.J. Benson and J.P.C. Greenlees**, *Commutative algebra for cohomology rings of classifying spaces of compact Lie groups*, J. Pure Appl. Algebra 122, 1997, no. 1-2, 41–53.

[6] **A. Clark and J. Ewing**, *The realization of polynomial algebras as cohomology rings*, Pacific J. Math. 50, 1974, 425–434

[7] **W.G. Dwyer and C.W. Wilkerson**, *A new finite loop sace at the prime two*, J. of AMS, 6 , 1993, 37–63

[8] **W.G. Dwyer and C.W. Wilkerson**, *Homotopy fixed–point methods for Lie groups and finite loop spaces*, Ann. of Math. , 139 (2) , 1994, 395–442

[9] **W.G. Dwyer and C.W. Wilkerson**, *Poincaré duality and Steinberg's theorem on rings of coinvariants*, Preprint

[10] **W.G. Dwyer, H. R. Miller and C.W. Wilkerson**, *Homotopical uniqueness of classifying spaces*, Topology 31 (1), 1992, 29–45

[11] **K. Ishiguro**, *Projective unitary groups and K–theory of classifying spaces*, Fukuoka University Science Reports vol 28 (1), 1998, 1–6

[12] **K. Ishiguro**, *Classifying spaces and a subgroup of the exceptional Lie group G_2*, Contemp. Math., 274, Amer. Math. Soc., 2001, 183–193

[13] **K. Ishiguro**, *Classifying spaces of compact Lie groups that are p–compact for all prime numbers*, Geometry & Topology Monographs 10, 2007, 195–211

[14] **K. Ishiguro**, *Invariant rings and dual representations of dihedral groups*, J. Korean Math. Soc. 47, no. 2, 2010, 299–309.

[15] **S. Jackowski, J.E. McClure and B. Oliver**, *Homotopy classification of self-maps of BG via G–actions Part I and Part II*, Ann. of Math. 135 , 1992 , 183–226, 227–270

[16] **S. Jackowski, J.E. McClure and B. Oliver**, *Maps between classifying spaces revisited*, Contemporary Math., 181, 1995, 263–298

[17] **R.M. Kane**, *The homology of Hopf spaces*, North-Holland Mathematical Library, 40. North-Holland Publishing Co., 1988

[18] **R.M. Kane**, *Reflection groups and invariant theory*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 5. Springer-Verlag, 2001

[19] **J. Lannes**, *Sur la cohomologie modulo p des p-groupes Abeliens elementaires*, in Homotopy Theory, Proc. Durham Symp. 1985, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 97–116

[20] **T.-C. Lin**, *Poincaré duality algebras and rings of coinvariants*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 6, 1599–1604

[21] **H.R. Miller**, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. , 120, 1984, 39–87

[22] **M. Neusel and L. Smith**, *Invariant theory of finite groups*, Mathematical Surveys and Monographs, 94. AMS, 2002

[23] **D. Notbohm**, *Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces, Handbook of Algebraic Topology*, North-Holland, 1995, 1049–1094

[24] **L. Smith**, *The nonrealizability of modular rings of polynomial invariants by the cohomology of a topological space*, Proc. Amer. Math. Soc. 86 (2), 1982, 339–340

[25] **L. Smith**, *Polynomial invariants of finite groups*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA,1995

[26] **L. Smith**, *On a theorem of R. Steinberg on rings of coinvariants*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 4, 1043–1048

[27] **L. Smith and R.E. Stong**, *Poincaré duality algebras mod two*, to appear in Advances in Mathematics

[28] **L. Smith and R.M. Switzer**, *Realizability and nonrealizability of Dickson algebras as cohomology rings*, Proc. of AMS, 89, 1983, 303–313

[29] **C.W. Wilkerson**, *Lab Notes on the exceptional Lie group E_8 at the prime* 2, Preprint