

# 突発性重力波のスパース性を用いたノイズ除去法の提案

川添一城\*・端山和大

(令和 5 年 5 月 15 日受理)

## A denoising method based on sparse representation of gravitational wave bursts

Kazuki KAWAZOE\*, Kazuhiro HAYAMA

(Received May 15, 2023)

### Abstract

The detection of gravitational wave by laser interferometric gravitational wave telescopes is done by analyzing observed time-series data dominated by the variety of noise such as instrumental noise and environmental noise. The detected gravitational wave signals are supposed to be distorted by the noise. Therefore, noise reduction is necessary to extract physics information from the detected signal. In this paper, for the purpose of noise reduction of the gravitational wave transients, we propose a de-noising method based on sparse representation of a gravitational wave burst. In order to evaluate our waveform estimation method, we study how much the signal-to-noise ratio (SNR) increases, and obtain the upper bound of the fraction of improvement is  $\sim 50\%$ .

**Keywords:** gravitational waves, sparsity, sparse modeling

### 1. はじめに

2015 年 9 月, レーザー干渉計型重力波望遠鏡 LIGO[1] によって 2 つのブラックホールから成る連星から放射される重力波が初めて検出されて以来 [2], これまでに多くの重力波が検出されており [3-5], Advanced LIGO[6] と Advanced Virgo[7], KAGRA[8] の計 4 台の重力波望遠鏡で行われる予定の観測では, 各望遠鏡の感度の向上により, これまでの観測で検出可能であった領域より遠く離れた場所から到来する重力波の検出が期待されている [9]. しかし, 検出された波形には重力波信号の他にノイズも同時に含まれており, 重力波に含まれる物理を調べるためにはノイズを低減することが重要である.

超新星爆発やガンマ線バーストから放射される突発性重力波は, 理論的な波形を予測することが困難である. ノイズ除去において, 検出される重力波の波形が理論的に予測できない場合, 検出された重力波の持つロバストな情報を有効に利用することが必要である.

そこで我々は, 数ミリ秒から数秒といった放射時間が短い突発性重力波信号の, 時間軸上におけるスパース性に着目することで, 突発性重力波の検出波形に含まれるノイズの除去を行う. スパース性に着目する考え方は歴史が長く, 1996 年にロバート・ティブシラニによって提案された LASSO[10] を筆頭に, 圧縮センシング [11] やブラックホールシャドウの撮影 [12,13] など, スパース性を基礎においた技術がこれまで様々な分野で応用されている [14].

本論文では, スパース性を用いたノイズ除去手法を提案する. また, 突発性重力波としてサインガウシアン信号を用いたシミュレーションを行い, 本手法で軽減可能なノイズの理論的な上限を調べる. 以降 2 章では, 提案するノイズ除去法について説明し, 3 章ではシミュレーションの設定とその結果を述べる. 最後の 4 章ではまとめと考察を述べる.

## 2. 突発性重力波のスパース性を用いた重力波のノイズ除去手法

ある周波数でサンプリングされた時系列の観測データ  $\mathbf{y}$  は、重力波信号  $\mathbf{h}$  とノイズ  $\mathbf{n}$  を用いて以下のように表すことができる [15].

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} + \mathbf{n} \quad (1)$$

ノイズ  $\mathbf{n}$  がガウス分布に従うと仮定したとき、ノイズを含む信号  $\mathbf{y}$  から重力波信号  $\mathbf{h}$  の推定値を求める方法の1つとして、最小二乗法がある。これは、モデルパラメータである  $\mathbf{h}$  と観測値  $\mathbf{y}$  との差の二乗和で表される関数を最小にすることで推定値を求める方法である。(1)式に対する最小二乗法による推定値は、以下のような関数を最小にすることで得られる。

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{h}\|_2^2 \quad (2)$$

ここで、 $\|\cdot\|_p$  は任意の  $N$  次元ベクトル  $\mathbf{x}$  に対して以下のように定義される。

$$\|\mathbf{x}\|_p \equiv \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (3)$$

しかし、 $\mathbf{h}$  のパラメータ数は未知であるため、(2)式の最小値を与える  $\mathbf{h}$  は観測データの全ての値が選択され、結果としてオーバーフィッティングを引き起こす。そこで、重力波信号のスパース性をパラメータ数の新たな条件として用いることで、モデルパラメータである  $\mathbf{h}$  に制約を加える。スパースな結果を与えるための手段として [16]、以下のような関数を最小にするような  $\mathbf{h}$  を推定値とする。

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{h}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{h}\|_1 \quad (4)$$

ここで、 $\lambda$  は0以上である。(4)式の第一項は最小二乗法と同様であるが、 $\lambda$  を制御パラメータとする第二項があるという点が最小二乗法と異なる。(4)式を最小にする推定値  $\hat{\mathbf{h}}$  は各成分で、

$$\hat{h}_i = \begin{cases} y_i - \lambda & (y_i > \lambda) \\ 0 & (-\lambda < y_i < \lambda) \\ y_i + \lambda & (y_i < -\lambda) \end{cases} \quad (5)$$

であり、最小二乗法による推定値の大きさが  $\lambda$  よりも小さいときはすべてスパースとなる関数で表される。

## 3. シミュレーションとその結果

### 3.1 シミュレーション

突発性重力波のシミュレーション波形として、サンプリング周波数 30000[Hz]、中心周波数 127[Hz]、最大振幅  $2.6 \times 10^{-20}$  のサインガウス信号を用いる。ノイズの分布は正規分布とし、分散  $\sigma^2 = 2.47 \times 10^{-45}$  から  $\sigma^2 = 1.0 \times 10^{-40}$  までの各ノイズレベルの波形に対して、本手法によるシミュレーションを 1000 回行った。

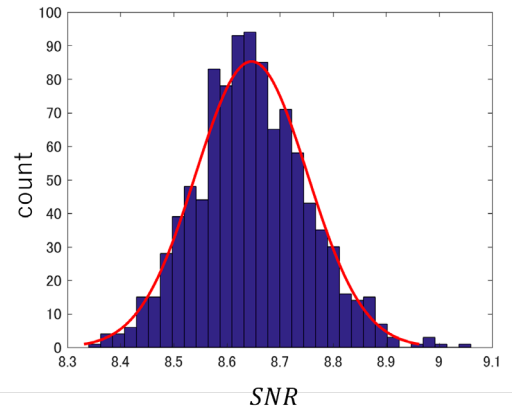
### 3.2 ノイズ除去の上限

信号の改善を定量的に表すために、ノイズ除去を行う前の波形に対する信号雑音比を  $SNR$ 、ノイズ除去を行った後の波形に対する信号雑音比を  $\widehat{SNR}$  としてそれぞれ以下のように定義し、 $\widehat{SNR}/SNR$  で信号の改善を評価する。

$$SNR \equiv \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (h_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (n_i)^2}} \quad (6)$$

$$\widehat{SNR} \equiv \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{h}_i)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\hat{h}_i - h_i)^2}}$$

(a)



(b)

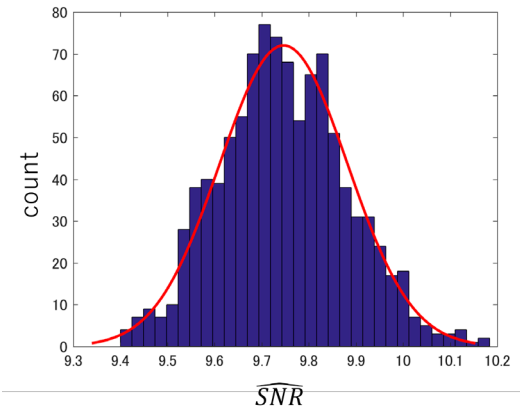


Fig. 1 Histograms of  $SNR$  (a) and  $\widehat{SNR}$  (b). The histograms are fitted by the normal distribution function. The variance of  $\widehat{SNR}$  and  $SNR$  are  $1.1 \times 10^{-2}$  and  $1.8 \times 10^{-2}$ , respectively.

ここで、波形推定の結果は $\lambda$ の値によって変化するため、推定に用いる $\lambda$ に伴いノイズ除去後の信号雑音比 $\widehat{SNR}$ も変化する。そのため $\lambda$ の選択は、ノイズ除去の精度を決める重要な要素の1つである。しかし本論文では $\lambda$ の選択手法については議論せず、 $\lambda$ の値を $\lambda=0$ から $\lambda=4.0 \times 10^{-20}$ まで刻み幅を $1.0 \times 10^{-24}$ として用意し、全ての $\lambda$ に対応する推定結果のうち $\widehat{SNR}$ の値が最大となるような理論的に最も優れた結果を与える $\lambda$ を用いる場合を調べる。

信号雑音比のヒストグラムを調べる。平均0、分散 $\sigma^2=8.12 \times 10^{-45}$ の正規分布に従うノイズを加えた波形に対する信号雑音比のヒストグラムをFig.1に示す。Fig.1(a)はノイズ除去を行う前の波形に対する信号雑音比 $SNR$ のヒストグラムであり、Fig.1(b)はノイズ除去を行った後の波形に対する信号雑音比 $\widehat{SNR}$ のヒストグラムである。それぞれのヒストグラムを正規分布でフィッティングを行った結果、 $SNR$ の分布は平均値が8.64、分散は $1.11 \times 10^{-2}$ であり、対応する $\widehat{SNR}$ の分布は平均値が9.74、分散は $1.84 \times 10^{-2}$ であった。この場合どちらのヒストグラムも正規分布と良くフィットしており、ノイズ除去の前後で分布が大きく変化することはない。

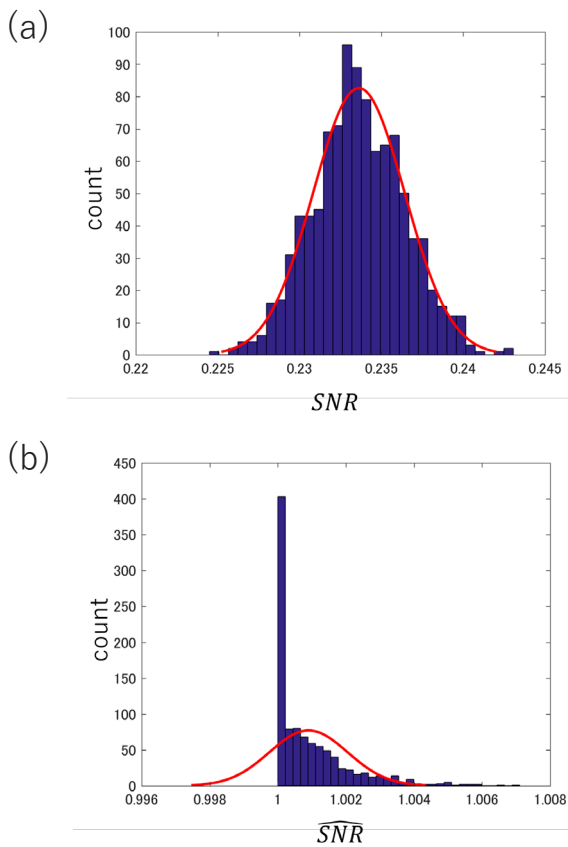


Fig. 2 Histograms of  $SNR$  (a) and  $\widehat{SNR}$  (b). The histograms are fitted by the normal distribution function. The variance of  $\widehat{SNR}$  and  $SNR$  are  $7.8 \times 10^{-6}$  and  $1.3 \times 10^{-6}$ , respectively.

ここで、 $SNR$ の平均が小さい場合について調べる。Fig.2(a),(b)は、 $SNR$ の平均が0.23の場合の、 $SNR$ と $\widehat{SNR}$ のそれぞれのヒストグラムと、ヒストグラムが正規分布に従うとしてフィッティングした図である。この場合、 $SNR$ のヒストグラムは正規分布とフィットしているが、対応する $\widehat{SNR}$ のヒストグラムは正規分布とは大きく異なる。すなわち $SNR$ が小さい場合、ノイズ除去の前後で分布が大きく変化するため $\widehat{SNR}/SNR$ の評価は単純ではない。そのため本論文では、 $SNR$ が十分に大きく、ノイズ除去の前後で信号雑音比の分布が変化することのない場合のみ考える。

$\widehat{SNR}/SNR$ の値の $SNR$ に対する変化を表した図をFig.3に示す。

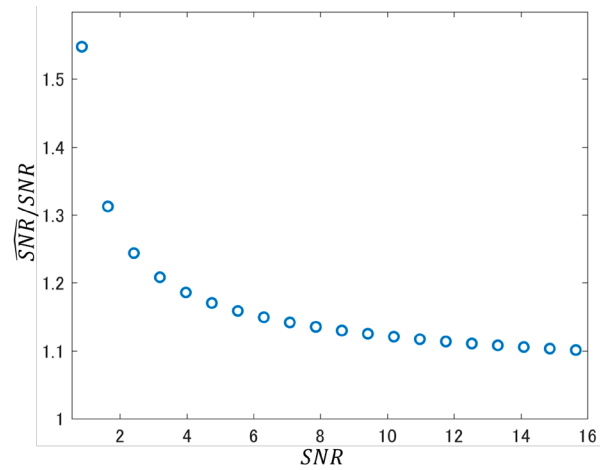


Fig. 3  $\widehat{SNR}/SNR$ .  $SNR$  is the signal-to-noise ratio of the original signal, and  $\widehat{SNR}$  is the one of the estimated signal by our estimation method.

$SNR$ が小さい波形に対しては50%以上の $\widehat{SNR}/SNR$ の改善が可能であるが、 $SNR$ が大きくなるに連れて $\widehat{SNR}/SNR$ は急激に減少し、0%に近づいていく結果となった。Fig.4は、最も大きく $SNR$ が改善

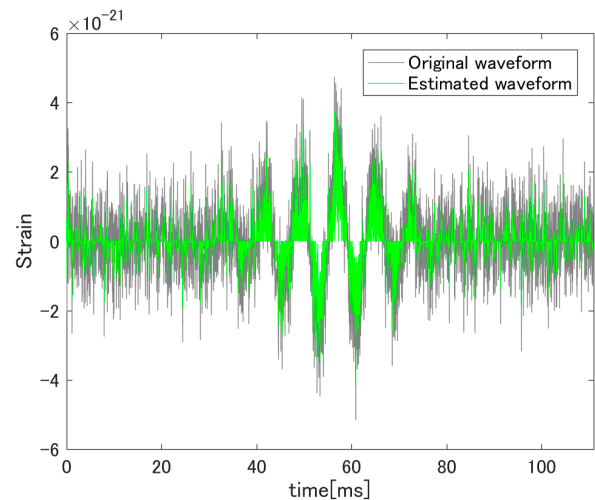


Fig. 4 Original (gray) waveform and Estimated (green) signal at  $\widehat{SNR}/SNR \sim 54.7$ . Sampling frequency is 30000 [Hz].

された波形であり、このとき $\widehat{SNR}/SNR$ は約 54.7% であった。全体的にパワーが小さくなっているが、波形に含まれる最も支配的な情報である中心周波数は維持した結果となった。

#### 4. まとめと考察

本論文では、重力波観測における突発性重力波の検出波形に含まれるノイズの除去を目的として、放射時間の短い重力波信号の特徴であるスパース性を用いた手法を提案した。また、本手法により除去することのできるノイズの理論的な上限を調べた。その結果、 $\widehat{SNR}/SNR$ は最大で 54.7% であり、 $SNR$ が大きくなるにつれて 0% に近づいていく結果となった。これは、信号に与えるノイズの影響が小さくなるにつれて除去可能なノイズの絶対量が小さくなるといった、定性的に矛盾しない結果を表している。本論文では、ノイズ除去を行った後の信号雑音比 $\widehat{SNR}$ が最も大きくなるような $\lambda$ を選択したが、 $\widehat{SNR}$ は真の波形を用いて定義しているため、この選択を行うためには真の波形が既知である必要がある。真の波形が未知である場合は、現実的に最適な $\lambda$ を決める手法が必要であり、それは今後の課題である。

#### 参考文献

- [1] LIGO Web page, <https://www.ligo.caltech.edu/MIT>
- [2] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
- [3] B. P. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. X* **9**, 031040 (2019).
- [4] R. Abbott *et al.*, *Phys. Rev. X* **11**, 021053 (2021).
- [5] R. Abbott *et al.*, arXiv:2111.03606v2 [gr-qc] (2021).
- [6] J. Aasi *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **32**, 074001 (2015).
- [7] F. Acernese *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **32**, 024001 (2015).
- [8] Y. Aso *et al.*, *Phys. Rev. D* **88**, 043007 (2013).
- [9] B. P. Abbott *et al.*, *Living Reviews in Relativity* **23**, 3 (2020).
- [10] R. Tibshirani, *J. R. Statist. Soc. B*, **58**, p. 267-288 (1996).
- [11] D. L. Donoho, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **52**, p. 1289-1306 (2006).
- [12] M. Honma, K. Akiyama, M. Uemura, S. Ikeda, *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **66**, 95 (2014).
- [13] Event Horizon Telescope Collaboration *et al.*, *Astrophys. J. Lett.* **930** L14 (2022).
- [14] T. Tanaka, *IEICE Fundamental Review*, **4**, p. 39-47 (2010).
- [15] K. Hayama, A. Nishizawa, *Phys. Rev. D* **87**, 062003 (2013).
- [16] T. Hastie, R. Tibshirani, M. Wainwright, "Statistical

*Learning with Sparsity*", p. 19-23 (2016).