

車輪型移動ロボットの高速走行制御に関する研究*

– 速度を有する2点間の最短時間軌道 –

岩 村 誠 人**

今 別 府 直 弘***

Study on High Speed Control of Mobile Robots – Time-Optimal Trajectories between Two Points with Nonzero Velocity –

Makoto IWAMURA and Naohiro IMABETSUPU

This paper discusses the problem of high speed control of mobile robots with two independently driven wheels. Firstly, the time-optimal trajectories between two points are numerically analyzed based on an optimal control algorithm. Then, using Pontryagin's maximum principle, we prove that all optimal controls that steers the robot from an arbitrary initial state to a desired state in minimum traveling time are necessarily bang-bang.

Key Words : Mobile Robot, Time-Optimal Trajectory, Bang-Bang Control, Pontryagin's Maximum Principle

1. は じ め に

車輪型移動ロボットは、平面整地においてはクローラ型や脚型などと比較して、移動速度、安定性、エネルギー効率など多くの点で優れている。そのなかでも Fig. 1 に示すような2輪独立駆動型 (skid-steer type) は、駆動と操舵を2つの車輪の回転のみで制御するため特別な操舵機構が不要であり、回転半径を自由に設定可能で多様な軌道に追従できることから工場の無人搬送車や研究用の移動ロボットとして広く用いられている。

移動ロボットには通常、ある作業を行うために停止あるいは通過する点のシーケンスが動作指令値として与えられる。このとき作業効率や生産性を考えると、各点間を移動するのに要する時間はできる限り短いことが望ましい。そのため移動ロボットの動作時間を短縮する軌道の設計法に関する研究が古くより活発に行われてきた。

本研究では、障害物が存在しない平面整地における2輪独立駆動型移動ロボットの最短時間制御問題について検討する。この問題は基本的かつ重要であるため、これまでも多くの研究者によって議論されている。Jacobs ら⁽¹⁾はある静止した状態から別の静止した状態に移動ロボットを移す問題を考え、車輪の角加速度が制限される場合、最適制御入力には必ず Bang-Bang 制御 (入力の上限と下限のみを用いる制御) になると主張した。その後、Reister ら

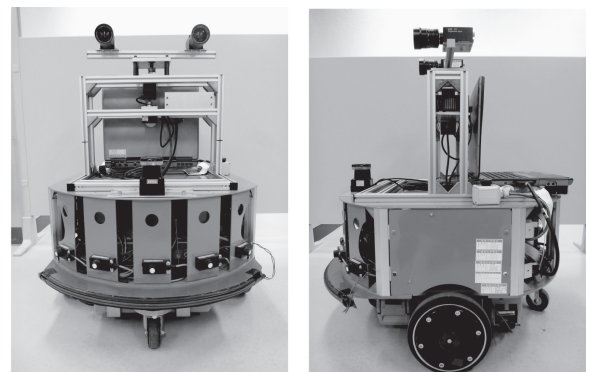


Fig. 1 A skid-steer type mobile robot

⁽²⁾は Jacobs らの証明の不十分な点を補い、さらに Renaud ら⁽³⁾は Reister らの証明の誤った点を修正している。静止した状態から静止した状態に移す特別なケースでは、車輪の加速と減速の切り換えが少なくとも1回は起こると仮定でき、彼らは証明の中でその条件を用いている。しかし指定された点で移動ロボットが静止しない場合にはそのような仮定は成立しないため、最適制御入力がどのような型になるかは明らかでない。

そこで、本論文では指定された点で速度を有する (始点あるいは終点で速度も指定される)、より一般的な境界条件の場合について考え、最適制御理論に基づいて最適制御入力の型を解析する。まず、著者の一人が先に開発している階層勾配法⁽⁴⁾⁽⁵⁾という特殊な最適制御アルゴリズムを用いて、幾つかの具体的な境界条件に対して数

* 平成 26 年 5 月 28 日受付

** 機械工学科

*** 機械工学専攻

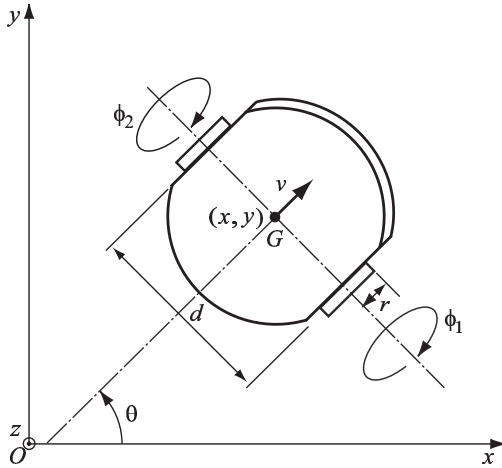


Fig. 2 Notation for the geometry of the mobile robot

値的に問題を解き、最適制御入力がどのような型になる傾向にあるかを観察する。次に、数値解析の結果を踏まえ、Pontryagin の最大原理に基づいて理論的に最適制御入力の型を解析する。その結果、指定された点で速度を有する一般的な境界条件の場合も最適制御入力は必ず Bang-Bang 制御になることが示される。

なお、先に述べた関連研究^{(1)~(3)}では、最短時間制御問題を移動ロボットの運動学モデルに基づいて議論しているため、厳密に言えば力学的な限界を考慮した解析にはなっており、両輪間の動的な干渉の影響などの重要な特性も無視されている。そこで、本論文ではより現実に近い動力学モデルに基づいて議論を行うことにする。

2. 2輪独立駆動型移動ロボットの動力学モデル

本章では、2輪独立駆動型移動ロボットの動力学モデルを導出する。ここでは、移動ロボットは平面内を移動し、Fig. 2 に示すようにその重心 G は車輪軸の中央に位置するとする。また、車輪半径 r は車軸長 d に対して小さいと仮定し、車体の慣性モーメントは z 軸まわりののみを考えることにする。以下では、重心 G の座標を (x, y) 、 x 軸から反時計まわりに測ったロボットの姿勢を θ 、重心の並進速度を v 、右(左)車輪の車軸まわりの回転角を $\phi_1(\phi_2)$ 、右(左)車輪の駆動トルクを $u_1(u_2)$ とする。また、車体の質量を m_1 、車体の z 軸まわりの慣性モーメントを I_{z1} 、車輪の質量を m_2 、車輪の z 軸まわりの慣性モーメントを I_{z2} 、車輪の車軸まわりの慣性モーメントを I_y とする。その他の記号は、適宜定義する。

2.1 運動学的拘束条件 移動ロボットの並進速度の x 方向成分、 y 方向成分はそれぞれ次式のように表せる。

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad (1)$$

$$\dot{y} = v \sin \theta \quad (2)$$

式(1)に $\cos \theta$ 、式(2)に $\sin \theta$ を乗じて加えることにより

$$v = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta \quad (3)$$

を得る。一方、式(1)に $-\sin \theta$ 、式(2)に $\cos \theta$ を乗じて加えると次式のようなになる。

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (4)$$

上式は、車輪が横滑りしない条件に相当する。一方、車輪が純転がりをし、地面に対して滑らないと仮定すると

$$v + \frac{d}{2} \dot{\theta} = r \dot{\phi}_1 \quad (5)$$

$$v - \frac{d}{2} \dot{\theta} = r \dot{\phi}_2 \quad (6)$$

が成り立つ。式(5)と式(6)を加え、式(3)を代入すると

$$2\dot{x} \cos \theta + 2\dot{y} \sin \theta - r \dot{\phi}_1 - r \dot{\phi}_2 = 0 \quad (7)$$

を得る。さらに、式(4)と式(7)から \dot{y}, \dot{x} を消去すると

$$-\frac{r}{2} \cos \theta \dot{\phi}_1 - \frac{r}{2} \cos \theta \dot{\phi}_2 + \dot{x} = 0 \quad (8)$$

$$-\frac{r}{2} \sin \theta \dot{\phi}_1 - \frac{r}{2} \sin \theta \dot{\phi}_2 + \dot{y} = 0 \quad (9)$$

のようになる。一方、式(5)から式(6)を引くと

$$-\frac{r}{d} \dot{\phi}_1 + \frac{r}{d} \dot{\phi}_2 + \dot{\theta} = 0 \quad (10)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{q} = [\phi_1, \phi_2, x, y, \theta]^T$ と定義すると、式(8)~(10)より運動学的拘束条件は次式

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \cos \theta & -\frac{r}{2} \cos \theta & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{r}{2} \sin \theta & -\frac{r}{2} \sin \theta & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{r}{d} & \frac{r}{d} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

のようにまとめることができる。

2.2 運動方程式 両輪の駆動トルクをまとめたベクトルを $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ 、ラグランジュ乗数ベクトルを $\boldsymbol{\lambda}$ と定義すると、移動ロボットの運動学的拘束を考慮した運動方程式は次式のように表せる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}[I_y, I_y, m, m, I_z]$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

ただし、表記を簡単にするために新たに $m \equiv m_1 + 2m_2$ 、 $I_z \equiv I_{z1} + 2(I_{z2} + m_2 L^2)$ と定義している。上式において $\mathbf{A}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}$ は式(11)の運動学的拘束条件による拘束反力を表している。

一方、両輪の回転角をまとめたベクトルを $\phi = [\phi_1, \phi_2]^T$ と定義すると、式 (11) より次式の関係を得る。

$$\dot{q} = S(q)\dot{\phi} \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\sin\theta & \frac{r}{d} \\ 0 & 1 & \frac{r}{2}\cos\theta & \frac{r}{2}\sin\theta & -\frac{r}{d} \end{bmatrix}^T$$

式 (13) を時間で微分すると次のようになる。

$$\ddot{q} = S\ddot{\phi} + \dot{S}\dot{q} \quad (14)$$

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{r}{2}\sin\theta\dot{\theta} & \frac{r}{2}\cos\theta\dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{2}\sin\theta\dot{\theta} & \frac{r}{2}\cos\theta\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}^T$$

式 (14) を式 (12) に代入し両辺に左側から S^T を乗じると

$$S^T M S \ddot{\phi} + S^T M \dot{S} \dot{q} = S^T B u + S^T A^T \lambda \quad (15)$$

のようになる。ここで、 $S^T M \dot{S} = 0, S^T A^T = 0$ であることに注意すると以下のような最小次元運動方程式を得る。

$$\ddot{\phi} = (S^T M S)^{-1} S^T B u \quad (16)$$

上式を詳しく記述すると次のようになる。

$$\ddot{\phi}_1 = a u_1 + b u_2 \quad (17)$$

$$\ddot{\phi}_2 = b u_1 + a u_2 \quad (18)$$

ただし、

$$a = (I_y + \frac{I_z r^2}{d^2} + \frac{m r^2}{4}) / \Delta$$

$$b = (\frac{I_z r^2}{d^2} - \frac{m r^2}{4}) / \Delta$$

$$\Delta = I_y^2 + \frac{r^2}{2} (\frac{4 I_z}{d^2} + m) I_y + \frac{m r^4}{d^2} I_z$$

である。式 (17), (18) より本モデルでは両輪の動力学的な干渉が表現できていることが確認できる。また、トルク u_1, u_2 を車輪を駆動するモータの最大連続トルク以下になるように制限することで動力学的な限界を考慮した軌道生成を行うことが可能である。

3. 最短時間制御問題の定式化

ここでは、本論文で検討する問題を定式化する。状態変数を $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [x, y, \theta, \phi_1, \phi_2]^T$ と定義すると、式 (13) および式 (16) より、2 輪独立駆動型移動ロボットの動特性は次のような状態方程式で表せる。

$$\dot{x}_1 = f_1(x, u) = r(x_4 + x_5) \cos x_3 / 2 \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x, u) = r(x_4 + x_5) \sin x_3 / 2 \quad (20)$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x, u) = r(x_4 - x_5) / d \quad (21)$$

$$\dot{x}_4 = f_4(x, u) = a u_1 + b u_2 \quad (22)$$

$$\dot{x}_5 = f_5(x, u) = b u_1 + a u_2 \quad (23)$$

以下では、上式をまとめて次のように表す。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (24)$$

車輪の駆動トルクは一般に次のように制限される。

$$|u_1(t)| \leq u_{\max}, |u_2(t)| \leq u_{\max} \quad (25)$$

ここで、 u_{\max} は駆動モータの最大連続トルクである。また、境界条件は、時刻 $t = t_0$ にある状態 x_i にあり、時刻 $t = t_1$ に別の状態 x_f まで移動するとし、

$$x(t_0) = x_i = [x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i, x_5^i]^T \quad (26)$$

$$x(t_1) = x_f = [x_1^f, x_2^f, x_3^f, x_4^f, x_5^f]^T \quad (27)$$

のように設定する。本論文では特に端点で速度を有する ($x_4^i, x_5^i, x_4^f, x_5^f$ のいずれか、あるいはすべてがゼロでない) 場合について考える。評価関数は、2 点間の移動に要する時間 t_f を最短にしたいので次式のように与える。

$$J = t_f = t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \quad (28)$$

本論文では、式 (24) で記述されるシステムに対して、式 (25) の制約条件、および式 (26), (27) の境界条件を満足し、式 (28) の評価関数を最小にする最適制御入力 $u(t)$ を求める問題について検討する。

4. 最短時間制御の数値解析

第 3 章で定式化した問題は、数値的にも解くことが困難な終端時刻自由かつ制約条件付き最適制御問題となっている。しかし、著者の一人は既にこのような問題に対しても良好な収束性が得られる階層勾配法という特殊な最適制御アルゴリズムを開発している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。そこで、本章では階層勾配法を用いて前章で定式化した問題を数値的に解き、端点で速度を有する場合の移動ロボットの最短時間制御について考察する。

4.1 階層勾配法 まず、実際の時間 $t \in [t_0, t_1]$ と擬似時間 $\tau \in [0, 1]$ を次のように結び付ける時間スケールファクタ $\kappa(\tau) (\geq 0)$ を導入する。

$$dt = \kappa(\tau) d\tau \quad (29)$$

このとき、評価関数すなわち動作時間 t_f は次式

$$J = t_f = t_1 - t_0 = \int_0^1 \kappa(\tau) d\tau \quad (30)$$

のように表される。式 (30) より、 κ を変えることによって t_f を変化させられることがわかる。

時間軸を t から τ に変換すると、式 (24) の状態方程式は次式のようになる。

$$x'(\tau) = f(x(\tau), u(\tau)) \kappa(\tau) \quad (31)$$

ただし, $(\cdot)'$ は τ に関する微分であり, 次の関係

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{\kappa(\tau)}$$

を用いた, 車輪の駆動トルクの制限は次式のようになる.

$$|u_1(\tau)| \leq u_{\max}, |u_2(\tau)| \leq u_{\max} \quad (32)$$

また, 境界条件は次式のように表せる.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_i = [x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i, x_5^i]^T \quad (33)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_f = [x_1^f, x_2^f, x_3^f, x_4^f, x_5^f]^T \quad (34)$$

したがって, 問題は式(31)で表されるシステムに対して, 式(32)の制約条件, および式(33), (34)の境界条件を満足し, 式(30)の評価関数を最小にする最適制御入力 $\mathbf{u}(\tau)$ および時間スケールファクタ $\kappa(\tau)$ を見出す問題となる. 時間軸を変換することにより, 終端時刻が固定された問題に帰着されていることに注意する. この問題を, 拡大制御入力 $\bar{\mathbf{u}}(\tau) = [\mathbf{u}(\tau)^T, \kappa(\tau)]^T$ を求める問題として解き, 得られた $\kappa(\tau)$ を用いて時間軸を逆変換すれば元の問題に対する解 $\mathbf{u}(t)$ が得られる.

式(30)~(34)の問題を解くための階層勾配法のアルゴリズムは以下のようになる.

- 1) 制約条件を満足する任意の関数 $\mathbf{u}^0(\tau), \kappa^0(\tau)$ を与える. 負定数 α , 収束判定基準値 ε を設定する. $k=0$ とおく.
- 2) 式(31)の状態方程式を初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_i$ から解いて $\mathbf{x}^0(\tau)$ を得る. 式(30)より評価関数値 J^0 を求める. 終端誤差ベクトル $\mathbf{e}^0 = \mathbf{x}^0(1) - \mathbf{x}_f$ を計算する.
- 3) 次の微分方程式を逆時間方向に解く.

$$\Phi'(\tau) = -\Phi(\tau) \mathbf{f}_x(\tau) \kappa(\tau), \quad \Phi(1) = \mathbf{E}$$

$$\sigma'(\tau) = -\sigma(\tau) \mathbf{f}_x(\tau) \kappa(\tau), \quad \sigma(1) = \mathbf{0}$$

ただし, $\Phi \in R^{5 \times 5}$ は状態遷移行列, $\sigma \in R^5$ は補助変数ベクトル, \mathbf{E} は単位行列, $\mathbf{f}_x = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ である.

- 4) 次の関数を計算し記憶する.

$$\bar{\mathbf{L}}(\tau) = \mathbf{L}(\tau) \mathbf{W}(\tau) = [\mathbf{L}_u(\tau) \mathbf{L}_\kappa(\tau)] \mathbf{W}(\tau)$$

$$\bar{\mathbf{K}}(\tau) = \mathbf{K}(\tau) \mathbf{W}(\tau) = [\mathbf{K}_u(\tau) \mathbf{K}_\kappa(\tau)] \mathbf{W}(\tau)$$

ただし,

$$\mathbf{L}_u(\tau) = \Phi(\tau) \mathbf{f}_u(\tau) \kappa(\tau), \mathbf{L}_\kappa(\tau) = \Phi(\tau) \mathbf{f}(\tau)$$

$$\mathbf{K}_u(\tau) = \sigma(\tau) \mathbf{f}_u(\tau) \kappa(\tau), \mathbf{K}_\kappa(\tau) = 1 + \sigma(\tau) \mathbf{f}(\tau)$$

$$\mathbf{W}(\tau) = \text{diag}[\eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \eta_\kappa(\tau)]$$

$$\eta_i(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{if } |u_i(\tau)| = u_{\max} \\ 1 & \text{if } |u_i(\tau)| < u_{\max} \end{cases}$$

$$\eta_\kappa(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{if } \kappa(\tau) = 0 \\ 1 & \text{if } \kappa(\tau) > 0 \end{cases}$$

であり, $\mathbf{f}_u = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ と定義している.

- 5) 次式によって修正量 $\delta \bar{\mathbf{u}}(\tau)$ を計算する.

$$\delta \bar{\mathbf{u}}(\tau) = \alpha (\bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{N}}^{-1} \mathbf{e} + \bar{\mathbf{K}}^T - \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{N}}^{-1} \int_0^1 \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{K}}^T d\tau)$$

ただし, $\bar{\mathbf{N}}$ は次式のように定義される行列である.

$$\bar{\mathbf{N}} = \int_0^1 \bar{\mathbf{L}}(\tau) \bar{\mathbf{L}}(\tau)^T d\tau$$

- 6) 拡大制御入力の修正を行う.

$$\bar{\mathbf{u}}^{k+1}(\tau) = \text{sat}[\bar{\mathbf{u}}^k(\tau) + \delta \bar{\mathbf{u}}^k(\tau)]$$

ただし, $\text{sat}[w]$ は w がその制限値によって飽和することを意味する. 得られた $\bar{\mathbf{u}}^{k+1}(\tau) = [\mathbf{u}^{k+1}(\tau)^T, \kappa^{k+1}(\tau)]^T$ に対応する $\mathbf{x}^{k+1}(\tau)$ を求め, $J^{k+1}, \mathbf{e}^{k+1}$ を計算する.

- 7) 次の収束判定条件

$$\|\mathbf{e}^{k+1}\| < \varepsilon, |J^{k+1} - J^k| < \varepsilon$$

を同時に満足した場合, 計算を終了する. 収束が十分な場合 $k = k+1$ としてステップ3)に戻る.

4.2 数値解析結果 前節で説明した階層勾配法を用いて, 第3章で定式化した問題を数値的に解く. まず, 例として以下の境界条件の場合について考える.

Case 01:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_i = [0 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0 \text{ deg}, -5 \text{ rad/s}, 5 \text{ rad/s}]^T$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_f = [10 \text{ m}, 10 \text{ m}, 0 \text{ deg}, 5 \text{ rad/s}, 5 \text{ rad/s}]^T$$

Case 02:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_i = [0 \text{ m}, 0 \text{ m}, 0 \text{ deg}, 5 \text{ rad/s}, 5 \text{ rad/s}]^T$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_f = [0 \text{ m}, 10 \text{ m}, 135 \text{ deg}, 5 \text{ rad/s}, 10 \text{ rad/s}]^T$$

移動ロボットの諸元は, $d = 1.5 \text{ m}$, $r = 0.01 \text{ m}$, $m_1 = 50.0 \text{ kg}$, $m_2 = 1.0 \text{ kg}$, $I_{z1} = 26.042 \text{ kgm}^2$, $I_{z2} = 0.0025 \text{ kgm}^2$, $I_y = 0.0050 \text{ kgm}^2$, $u_{\max} = 1.00 \text{ Nm}$ と設定し, 初期時刻は $t_0 = 0 \text{ s}$ とする. また, 階層勾配法におけるパラメータは, $\alpha = -0.01$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $u_1^0 \equiv u_2^0 \equiv 0.5$, $\kappa^0 \equiv 5.0$ と設定する.

Case 01 および Case 02 に対して階層勾配法を適用し, 数値解を求めた. 得られた最適軌道を Fig. 3 と Fig. 6 に, 最適制御入力を Fig. 4 と Fig. 7 に, また車輪角速度を Fig. 5 と Fig. 8 に示す. 数値計算は時間を離散化して行っており, また階層勾配法の特徴からも制御入力の瞬間的な切り換えは実現できないが, Fig. 4 と Fig. 7 より Case 01, Case 02 とともに, 最適制御入力は概ね Bang-Bang 制御になっていることが確認できる. 入力の上限あるいは下限を用いている時間区間の総和を t_b とし, 全動作時間 $t_f = t_1 - t_0$ との比 $\beta = t_b/t_f$ を計算すると Case 01 では $\beta = 98.0\%$, Case 02 では $\beta = 97.0\%$ であった.

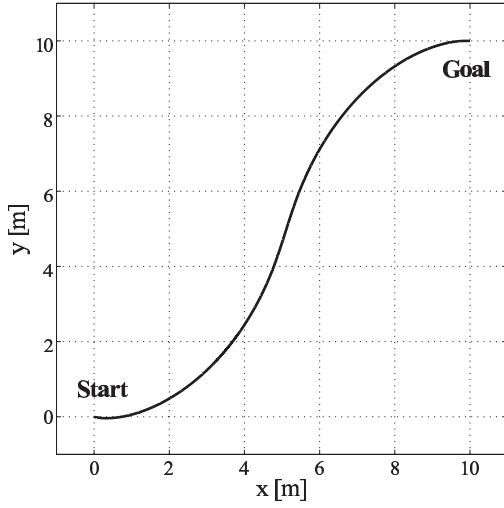


Fig. 3 Mobile robot trajectory (Case 01)

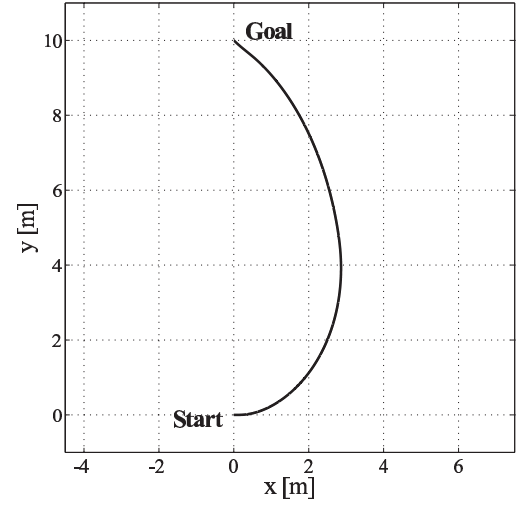


Fig. 6 Mobile robot trajectory (Case 02)

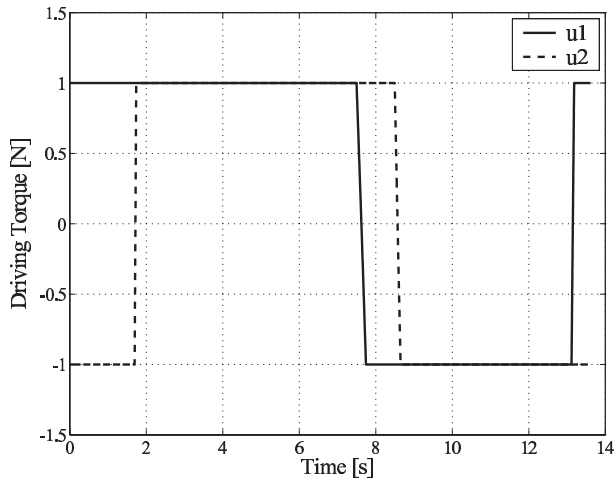


Fig. 4 Wheel driving torque (Case 01)

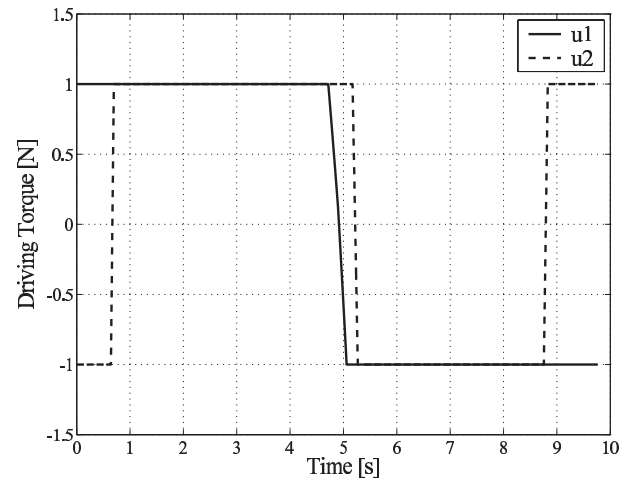


Fig. 7 Wheel driving torque (Case 02)

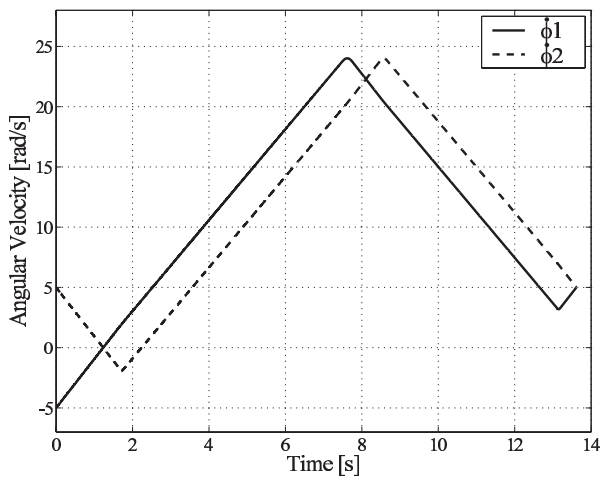


Fig. 5 Wheel angular velocity (Case 01)

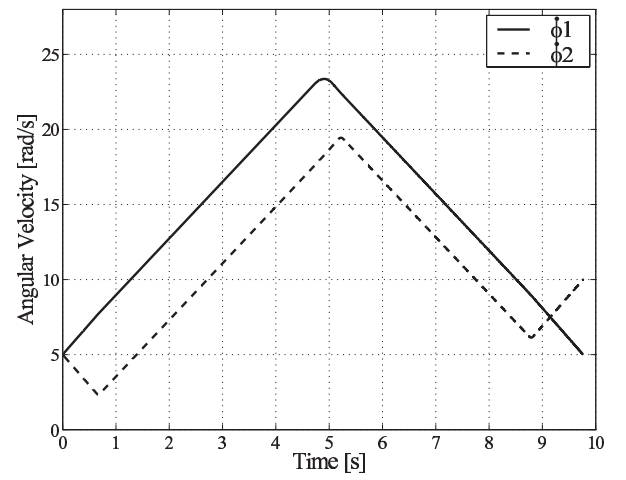


Fig. 8 Wheel angular velocity (Case 02)

Table 1 Ratio of bang-bang interval to total time [%]

Case 01	98.0	Case 11	91.3	Case 21	98.0
Case 02	97.0	Case 12	97.2	Case 22	99.2
Case 03	97.5	Case 13	97.6	Case 23	98.5
Case 04	93.7	Case 14	92.2	Case 24	95.8
Case 05	94.2	Case 15	95.4	Case 25	91.4
Case 06	94.5	Case 16	97.1	Case 26	91.1
Case 07	94.6	Case 17	99.6	Case 27	93.2
Case 08	94.3	Case 18	94.3	Case 28	98.3
Case 09	96.7	Case 19	91.3	Case 29	94.2
Case 10	96.9	Case 20	93.3	Case 30	94.5

同様に, $0 \leq x, y \leq 15$ m, $-180 \leq \theta \leq 180$ deg, $-10 \leq \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2 \leq 10$ rad/s の範囲でランダムに 28 通り始点と終点の境界条件を設定し (ただし, 速度は必ず非ゼロとする), 最適軌道を生成した. Case 01, 02 と合わせて計 30 通りの場合の β の値を Table 1 にまとめる. すべての場合に対して 90% を超えており, 全体の平均値は 95.4% であった. これより, 端点で速度を有する場合も最適制御入力 は Bang-Bang 制御になるのではないかと予想される.

5. 最短時間制御の理論解析

前章の数値解析結果より, 端点で速度を有する場合も最適制御入力は Bang-Bang 制御になるのではないかと考えられる. そこで, 本章では Pontryagin の最大原理⁽⁶⁾に基づいて, このことを理論的に証明することを試みる.

まず, 随伴変数ベクトル $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5]^T$ を導入し, 次のハミルトン関数を定義する.

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3 + \psi_4 f_4 + \psi_5 f_5 \\ = \gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) + s_1(\boldsymbol{\psi})u_1 + s_2(\boldsymbol{\psi})u_2 \quad (35)$$

ただし, $\gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) = \psi_1 f_1 + \psi_2 f_2 + \psi_3 f_3$, $s_1(\boldsymbol{\psi}) = a\psi_4 + b\psi_5$, $s_2(\boldsymbol{\psi}) = b\psi_4 + a\psi_5$ である. ここで, 随伴変数 ψ_i は以下の微分方程式を満足するものとする.

$$\dot{\psi}_1 = -\partial H / \partial x_1 = 0 \quad (36)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\partial H / \partial x_2 = 0 \quad (37)$$

$$\dot{\psi}_3 = -\partial H / \partial x_3 = p(x_3)(x_4 + x_5) \quad (38)$$

$$\dot{\psi}_4 = -\partial H / \partial x_4 = -q(x_3) - r\psi_3/d \quad (39)$$

$$\dot{\psi}_5 = -\partial H / \partial x_5 = -q(x_3) + r\psi_3/d \quad (40)$$

ただし, $p(x_3)$, $q(x_3)$ を次式のように定義している.

$$p(x_3) = r(\psi_1 \sin x_3 - \psi_2 \cos x_3)/2 \quad (41)$$

$$q(x_3) = r(\psi_1 \cos x_3 + \psi_2 \sin x_3)/2 \quad (42)$$

Pontryagin の最大原理によれば, 最短時間問題の場合, 制御入力 $\mathbf{u}(t)$ が最適であるためには, 区間 $t \in [t_0, t_1]$ の

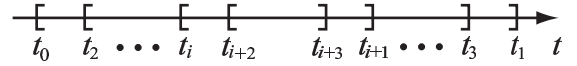


Fig. 9 Division of time intervals

任意の t で以下の 2 つの条件を成立させるゼロでないベクトル $\boldsymbol{\psi}(t)$ が存在しなければならない (必要条件).

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) = \sup_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) \quad (43)$$

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t)) \equiv 0 \quad (44)$$

ただし, U は制御入力 $\mathbf{u}(t)$ の許容集合である.

式 (43) の条件より, 最適制御入力 $\mathbf{u}(t)$ はハミルトン関数 $H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t))$ が $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ で最大になるように

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{\max} & (s_i > 0 \text{ のとき}) \\ -u_{\max} & (s_i < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (45)$$

と選ばなければならない. 測度がゼロでない有限な時間区間で $s_i \equiv 0$ となる場合には式 (45) により u_i を決定できないが, この場合にも最適性の条件を満足する可能性がある. 以下では, この特異制御について, 5.1. $s_1 \equiv 0$, $s_2 \neq 0$, 5.2. $s_1 \neq 0$, $s_2 \equiv 0$, 5.3. $s_1 \equiv 0$, $s_2 \equiv 0$, の 3 つの場合に分けて調べる. 以降の議論において $[t_{i+2}, t_{i+3}]$ は $[t_i, t_{i+1}]$ の部分区間であるとする (Fig. 9 参照).

5.1 区間 $[t_2, t_3]$ で $s_1 \equiv 0$, $s_2 \neq 0$ となる場合 このとき, 式 (45) より u_2 は Bang-Bang 制御となる. $s_1 = a\psi_4 + b\psi_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ より, $a\dot{\psi}_4 + b\dot{\psi}_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ が成り立つので, 式 (39), (40) を代入すると次式を得る.

$$\dot{\psi}_3 = -\frac{d}{r} \cdot \frac{a+b}{a-b} \cdot q \quad (46)$$

式 (46) を時間で微分したものを式 (38) と等置し $\dot{q} = -p\dot{x}_3$ であることに注意すると $p(x_3)(bx_4 - ax_5) \equiv 0 [t_2, t_3]$ を得る. 以下では, 5.1.1. $p(x_3) \equiv 0$, 5.1.2. $bx_4 - ax_5 \equiv 0$, の 2 つの場合に分けて考える.

5.1.1 区間 $[t_4, t_5]$ で $p(x_3) \equiv 0$ となる場合 式 (41) より, これはさらに 1. $\psi_1 \neq 0$ または $\psi_2 \neq 0$, 2. $\psi_1 \equiv 0$, $\psi_2 \equiv 0$, の 2 つの場合に分けられる.

1. 区間 $[t_6, t_7]$ で $\psi_1 \neq 0$ または $\psi_2 \neq 0$ の場合

式 (36), (37) より ψ_1, ψ_2 は定数なので $p(x_3) \equiv 0$ ならば x_3 も区間 $[t_6, t_7]$ で定数となる. よって, $\dot{x}_3 \equiv 0 [t_6, t_7]$ となるので, 式 (21) より $x_4 = x_5 [t_6, t_7]$ を得る. したがって, $\dot{x}_4 \equiv \dot{x}_5 [t_6, t_7]$ となるので式 (22), (23) より $au_1 + bu_2 = bu_1 + au_2 [t_6, t_7]$ が成り立つ. $a \neq b$ であるので $u_1 \equiv u_2 [t_6, t_7]$ となる. 今, $s_2 \neq 0$ の場合を考えているので u_2 は Bang-Bang 制御になる. したがって, この場合は u_1 も Bang-Bang 制御になる.

2. 区間 $[t_6, t_7]$ で $\psi_1 \equiv 0$, $\psi_2 \equiv 0$ の場合

式 (42) より $q \equiv 0 [t_6, t_7]$ となるので, 式 (46) より $\psi_3 \equiv 0 [t_6, t_7]$ が成り立つ. 今, $s_1 \equiv 0, s_2 \neq 0$ の場合を考えているので, $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv 0, \psi_3 \equiv 0 [t_6, t_7]$ であれば, 式 (35) よりハミルトン関数は $H = s_2 u_2 [t_6, t_7]$ となる. 式 (44) の条件を満足するためには $u_2 \equiv 0 [t_6, t_7]$ となる必要があるが, これは明らかに $s_2 \neq 0$ の条件下でハミルトン関数を最大にする u_2 ではない. したがって, この場合は最適性の条件 (43), (44) をともに満足する解は存在しない.

5.1.2 区間 $[t_4, t_5]$ で $bx_4 - ax_5 \equiv 0$ となる場合 このとき, $b\dot{x}_4 - a\dot{x}_5 \equiv 0 [t_4, t_5]$ が成り立つので, 式 (22), (23) より $(b^2 - a^2)u_2 \equiv 0 [t_4, t_5]$ となる. よって, $a \neq b$ であるので $u_2 \equiv 0 [t_4, t_5]$ となるが, ここでは, $s_2 \neq 0$ の場合を考えているので, これはハミルトン関数を最大にする制御ではなく不適である.

以上により, 5.1 の場合に最適性の必要条件を満足する制御は Bang-Bang 制御のみであることがわかる.

5.2 区間 $[t_2, t_3]$ で $s_1 \neq 0, s_2 \equiv 0$ となる場合 問題の対称性から, 5.1 の場合と同様にして, 最適制御の候補は Bang-Bang 制御のみであることが示せる.

5.3 区間 $[t_2, t_3]$ で $s_1 \equiv 0, s_2 \equiv 0$ となる場合 $a\psi_4 + b\psi_5 \equiv 0, b\psi_4 + a\psi_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ と $a \neq b$ より, $\psi_4 \equiv 0, \psi_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ を得る. よって $\psi_4 \equiv 0, \psi_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ となる. このとき式 (39), (40) より $q \equiv 0, \psi_3 \equiv 0 [t_2, t_3]$ となる. よって, $\psi_3 \equiv 0 [t_2, t_3]$ なので式 (38) より $p(x_3)(x_4 + x_5) \equiv 0$ を得る. これは, 5.3.1. $p(x_3) \equiv 0$, 5.3.2. $x_4 + x_5 \equiv 0$, の 2 つの場合に分けられる.

5.3.1 区間 $[t_4, t_5]$ で $p(x_3) \equiv 0$ となる場合 $p(x_3) \equiv 0, q(x_3) \equiv 0 [t_4, t_5]$ より, $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv 0 [t_4, t_5]$ となるが, 式 (36), (37) より ψ_1, ψ_2 は定数であるので $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv 0 [t_1, t_2]$ となる. このとき, $p(x_3) \equiv 0, q(x_3) \equiv 0 [t_0, t_1]$ となるので式 (38) より $\psi_3 \equiv 0 [t_0, t_1]$ となる. したがって, ψ_3 は区間 $[t_0, t_1]$ で定数となるが $\psi_3 \equiv 0 [t_2, t_3]$ であったので $\psi_3 \equiv 0 [t_0, t_1]$ となる. よって式 (39), (40) より $\psi_4 \equiv 0, \psi_5 \equiv 0 [t_0, t_1]$ となるが, $\psi_4 \equiv 0, \psi_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ であったので $\psi_4 \equiv 0, \psi_5 \equiv 0 [t_0, t_1]$ となる. したがって, ベクトル $\psi(t) = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5]^T$ が全区間 $[t_0, t_1]$ でゼロとなるので最適性の条件を満足しない.

5.3.2 区間 $[t_4, t_5]$ で $x_4 + x_5 \equiv 0$ となる場合 $q \equiv 0 [t_2, t_3]$ となるのは, $\psi_1 \equiv 0, \psi_2 \equiv 0 [t_2, t_3]$ の場合と, $\psi_1 \neq 0$ または $\psi_2 \neq 0 [t_2, t_3]$ の場合に分けられるが, 前者の場合は 5.3.1 で示したように不適となるので, 以下 $\psi_1 \neq 0$ または $\psi_2 \neq 0 [t_2, t_3]$ の場合について考える. このとき x_3 は区間 $[t_2, t_3]$ で定数となるので, $\dot{x}_3 \equiv 0 [t_2, t_3]$ となる. すると, 式 (21) より $x_4 - x_5 \equiv 0 [t_2, t_3]$ となるが, いま, $x_4 + x_5 \equiv 0 [t_4, t_5]$ の場合を考えているので

$x_4 \equiv 0, x_5 \equiv 0 [t_4, t_5]$ となる. このとき, 式 (19), (20) より, $\dot{x}_1 \equiv 0, \dot{x}_2 \equiv 0 [t_4, t_5]$ となるが, $\dot{x}_3 \equiv 0 [t_4, t_5]$ であったので, これは区間 $[t_4, t_5]$ でロボットが停止することを意味する. ゆえに, 時間最適解として不適である.

以上により, 5.3 の場合には最適性の必要条件を満足する解は存在しないことがわかる.

5.4 第 5 章の議論のまとめ 本章の議論を総合すると, 2 輪独立駆動型移動ロボットの最短時間制御問題における最適制御入力の場合は, 端点で速度を有する一般的な場合も必ず Bang-Bang 制御になるといえる.

6. お わ り に

本論文では, 2 輪独立駆動型移動ロボットを対象とし, 指定点で速度を有する一般的な境界条件のもとでの最短時間制御問題について検討した. まず, 両輪の干渉や力学的な限界を考慮することが可能な動力学モデルを導出し, 最短時間制御問題を最適制御問題として定式化した. そして, 第一著者が提案している階層勾配法を用いて幾つかの境界条件に対して最適解を求めた結果, 端点で速度を有する場合も最適制御入力は Bang-Bang 制御になると予想された. そこで, Pontryagin の最大原理に基づいて, 詳細な解析を行なった結果, 特異制御も含め, 最適制御入力は常に Bang-Bang 制御となることが示された. この結果は, 例えば走行中に移動障害物を認識し, 一旦停止することなく実時間で軌道をアップデートする場合など, 移動ロボットの動的な環境下における軌道生成に役立てられると考えられる.

文 献

- (1) P. Jacobs, J.P. Laumond and A. Rege : Nonholonomic Motion Planning for Hilare-Like Mobile Robots, Proceedings of the International Symposium on Intelligent Robotics, p.338-347 (1991).
- (2) D.B. Reister and F.G. Pin : Time-Optimal Trajectories for Mobile Robots with Two Independently Driven Wheels, The International Journal of Robotics Research, 13, 1, p.38-54 (1994).
- (3) M. Renaud and J.V. Fourquet : Minimum Time Motion of a Mobile Robot with Two Independent Acceleration-Driven Wheels, Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, p.2608-2613 (1997).
- (4) 岩村, 山本, 毛利 : 複数の拘束条件が課せられる最適軌道計画問題の一般数値解法とその非ホロノミック系への適用, 日本ロボット学会誌, 19, 2, p.260-270 (2001).
- (5) 岩村, 河野, 尾崎, 毛利 : 拘束条件を有する最適制御問題の一般数値解法, 計測自動制御学会論文集, 39, 2, p.127-135 (2003).
- (6) L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and E.F. Mishchenko : L.S. Pontryagin Selected Works, Volume 4: The Mathematical Theory of Optimal Processes, New York: Gordon and Breach Science Publishers (1986).