

柔軟マルチボディダイナミクスのための モデル低次元化法に関するサーベイと考察*

岩 村 誠 人**

Survey and Some Remarks on the Model Order Reduction Methods for Flexible Multibody Dynamics

Makoto IWAMURA**

In engineering, the finite element method (FEM) is frequently used for the description of the deformable body. However, it usually leads to a large number of degrees of freedom. Therefore, to incorporate the flexible body modeled by FEM into multibody dynamics analysis, it is necessary to reduce the elastic degrees of freedom properly. This paper surveys the current state-of-the-art in model order reduction for flexible multibody dynamics. It explains the problems, describes the characteristics of many different methods, and speculates on future directions.

Key Words : Flexible Multibody Dynamics, Model Order Reduction, Singular Value Decomposition, Krylov Subspace

1. は じ め に

近年, 各種の機械に対して, 高速化, 省エネルギー化, 低コスト化の要求がますます強くなってきている. その結果, 機械システムを構成する部品は軽量化され, 柔軟になる傾向にあり, 動力学解析においても運動中に生じる弾性変形の影響を無視できない場合が多くなってきている. そのため, Fig. 1 に示すような柔軟ボディを含む複雑な機械システムの動力学計算理論およびシミュレーション技術の確立が望まれている.

柔軟ボディは, 一般に CAD で形状を作成した後, 有限要素法によって離散化される場合が多い. しかし, 有限要素モデルは通常大きな自由度を有するため, そのままマルチボディダイナミクス解析に取り込むと運動方程式の次元も大きくなり, 解析に要する時間が膨大になる. したがって, 柔軟ボディの挙動になるべく影響を与えることなく適切に自由度を低次元化する必要がある. 従来, このモデル低次元化にはモード解析を利用する方法が用いられてきたが, 計算精度や利便性に問題があるため, 最近それに代わる新しい方法が次々に開発されている. 本論文では, これまでに提案されている様々なモデル低次元化法の考え方や特徴を整理し, モデル低次元化を行う際の指針を与えることを目的とする. また, 最新の研究動向をまとめ, 今後の展望について述べる.

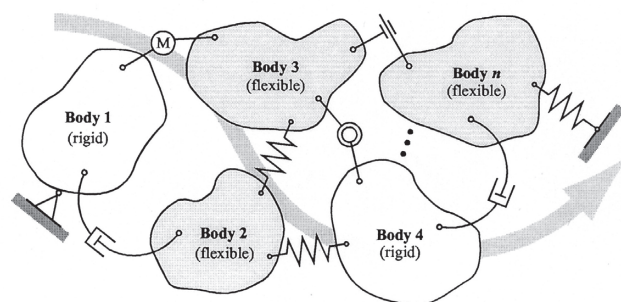


Fig. 1 Multibody system

2. 柔軟ボディの運動方程式とモデル低次元化

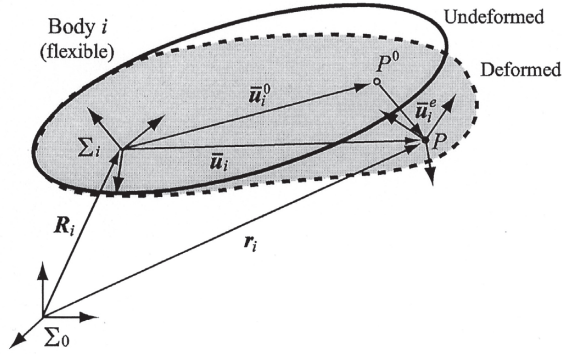
柔軟ボディの運動を記述するための方法としてフローティングフレーム法 (Floating-Frame of Reference Formulation)⁽¹⁾⁽²⁾が広く用いられている. この方法では, Fig. 2 に示すように絶対座標系 Σ_0 とボディ i 上に設置したボディ座標系 Σ_i を用いる. このとき, 柔軟ボディ i 上の任意点 P の位置は以下のように表せる.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \mathbf{A}_i(\bar{\mathbf{u}}_i^0 + \bar{\mathbf{u}}_i^e) \quad (1)$$

ここで, \mathbf{R}_i は絶対座標系からみたボディ座標系原点の位置を表すベクトル, \mathbf{A}_i はボディ座標系の姿勢行列で回転 3 自由度を表す $\boldsymbol{\theta}_i$ の関数, $\bar{\mathbf{u}}_i^0$ はボディ座標系からみた変形前の柔軟ボディ上の任意点 P の位置, $\bar{\mathbf{u}}_i^e$ はその点における変形を表す. 柔軟ボディを線形有限要素法によ

* 原稿受付平成 24 年 11 月 22 日受付

** 機械工学科

Fig. 2 Coordinate system of flexible body i

て離散化する場合, 変形 \bar{u}_i^e は次式のように表せる.

$$\bar{u}_i^e = S_i q_i \quad (2)$$

ここで, S_i は形状関数行列, q_i は節点座標である. フローティングフレーム法では, 絶対座標系からみたボディ座標系の位置姿勢を表す参照座標 $a_i = [R_i^T \ \theta_i^T]^T \in R^6$ とボディ座標系に対する微小変形を表す弾性座標 $q_i \in R^N$ により柔軟ボディの運動を記述する. この方法によれば, 1つの柔軟ボディの運動方程式は次式のように表される.

$$\begin{bmatrix} M_r^i & M_{re}^i \\ M_{er}^i & M_e^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_r^i \\ h_e^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_e^i q_i - D_e^i \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで, M_*^i は慣性行列, h_*^i は一般化慣性力・重力・外力であり, それぞれ a_i と q_i に対応させて分割している. また, K_e^i , D_e^i は, 弾性座標に関する剛性行列, 減衰行列である. 有限要素法を用いる場合, 節点座標 q_i は通常大きな自由度を有するため, 式(3)の運動方程式も大きな次元となり, このままでは動力学解析に要する時間が膨大となる. そのため, 柔軟ボディの挙動になるべく影響を与えることなく適切に自由度を低次元化する方法が必要である. 以下では, 式(3)に基づいてモデル低次元化の問題を議論するが, 表記を簡単にするために添字 i は省略することにする.

3. モデル低次元化の基礎

本章では, 基本となる射影法⁽³⁾の考え方とその柔軟マルチボディシステムへの適用について簡潔にまとめる. 柔軟ボディがボディ座標系のまわりで振動すると仮定し, ボディに作用する力 $B_e u$ とその応答 $y = C_e q$ を考慮した次の多入出力システムを考える.

$$M_e \ddot{q} + D_e \dot{q} + K_e q = B_e u \quad (4)$$

$$y = C_e q \quad (5)$$

上式の解 $q(t) \in R^N$ を射影行列 $V \in R^{N \times n}$ ($n \ll N$) を用いて次式のように近似する.

$$q(t) = V \bar{q}(t) \quad (6)$$

式(6)を式(4), (5)に代入すると次のようになる.

$$M_e V \ddot{\bar{q}} + D_e V \dot{\bar{q}} + K_e V \bar{q} = B_e u + r \quad (7)$$

$$y = C_e V \bar{q} \quad (8)$$

ただし, r は式(6)の近似に伴う残差である. 式(7)は n 個の未知数 \bar{q} に対して N 個の条件を与えている. そこで, $W^T r = 0$ となる $W \in R^{N \times n}$ の転置を式(7)の両辺に左から乗じて拘束を加える. これにより, 次のような n 次元に低次元化されたシステムを得る.

$$\bar{M}_e \ddot{\bar{q}} + \bar{D}_e \dot{\bar{q}} + \bar{K}_e \bar{q} = \bar{B}_e u \quad (9)$$

$$y = \bar{C}_e \bar{q} \quad (10)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \bar{M}_e &= W^T M_e V, \bar{D}_e = W^T D_e V, \bar{K}_e = W^T K_e V \\ \bar{B}_e &= W^T B_e, \bar{C}_e = C_e V \end{aligned} \quad (11)$$

である.

次に, この射影法を式(3)で表される柔軟ボディの運動方程式に適用する場合について考える. まず, 次の座標変換を定義する.

$$\begin{bmatrix} a \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \bar{q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

これを式(3)に代入し, 両辺に左から次の行列

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \quad (13)$$

の転置を掛けると, 以下の低次元化モデルが得られる.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_r & M_{re} V \\ W^T M_{er} & W^T M_e V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{\bar{q}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_r \\ W^T h_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -W^T K_e V \bar{q} - W^T D_e V \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

射影法では, V と W を具体的にどのように構成するかが問題となる.

一般に, モデル低次元化においては,

- システムの安定性(や受動性)が保存されるか?
- 低次元化による誤差の上限が見積もれるか?
- 計算効率が良く大規模システムに適用できるか?

などの性質が重要になる. モデル低次元化法は, 1階微分方程式(状態方程式)に基づくものと, 2階微分方程式(運動方程式)に基づくものがあるが, 式(14)の形に直接低次元化することができれば既存の汎用マルチボディダイナミクスコードを内部を変更することなく用いることができるため, 柔軟マルチボディシステムの場合は, 低次元化の過程で2階微分方程式の構造を保てるかどうかでもある. 以下では, これまでに提案されている代表的な方法とその特徴をまとめる.

4. モード解析を用いる方法

現在, 最も多く利用されているのはモード解析を用いる方法⁽¹⁾である. 柔軟ボディがボディ座標系の近傍で自由振動をすると仮定すると式 (3) は次式ようになる.

$$M_e \ddot{q} + D_e \dot{q} + K_e q = 0 \quad (15)$$

減衰項を無視し, 解の形を $q = \hat{q} e^{j\omega t}$ と仮定して上式に代入すると次式を得る.

$$K_e \hat{q} = \omega^2 M_e \hat{q} \quad (16)$$

この一般化固有値問題を解いて, N 個の固有振動数 ω_i と対応する固有モード \hat{q}_i を求める. 低次元化は, 選択した n 個の固有モード \hat{q}_i を並べて縮小された正規モード行列 $\bar{\Phi}$ を作り, $V = W = \bar{\Phi}$ と定義することにより行うことができる.

この方法は, 2 階微分方程式 (運動方程式) に直接適用することができ, 低次元化による誤差の上限も近似的に見積もることが可能である⁽⁴⁾. しかし, 柔軟ボディの任意点に作用する外力の空間的な特徴を考慮していないため収束が非常に遅く, 精度のよい近似モデルを得るためには n を比較的大きくとる必要があるという問題がある. 収束を向上させるために固有モードの基底に外的な力要素によって生じる変形モード (アタッチメントモード) を重ね合わせる拡張法も提案されているが, 固有モードやアタッチメントモードの選定は一般に難しく, 多くの経験と問題毎の工夫が必要になる.

5. 特異値分解に基づく方法

特異値分解 (Singular Value Decomposition) に基づく方法として, 固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition) 法⁽⁵⁾, 平衡化打切法⁽⁶⁾⁽⁷⁾, Hankel ノルムに基づく近似⁽⁸⁾, などがある. ここでは, 基本になる平衡実現と平衡化打切法の考え方^{(9)~(11)}, およびその柔軟マルチボディシステムへの応用に適した改良版であるグラミアンに基づく方法⁽¹²⁾⁽¹³⁾についてまとめる.

平衡実現は, 1 階微分方程式 (状態方程式) に基づく方法である. 状態変数を $x = [q^T \dot{q}^T]^T$ と定義すると式 (4), (5) の状態方程式表現は次式のようにになる.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (17)$$

$$y = Cx \quad (18)$$

ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_e^{-1} K_e & -M_e^{-1} D_e \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_e^{-1} B_e \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_e & 0 \end{bmatrix}$$

である. 式 (17), (18) で表わされるシステムの可制御グラミアン P と可観測グラミアン Q は

$$P = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (j\omega I - A)^{-1} B B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} d\omega$$

$$Q = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (j\omega I - A^T)^{-1} C^T C (-j\omega I - A)^{-1} d\omega$$

のように定義され, それぞれ以下のリアプノフ方程式を解くことにより求められる.

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (21)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (22)$$

また, P と Q の積の固有値 λ_i の平方根 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$ はハンケル特異値と呼ばれている.

平衡実現は, 可制御グラミアン P と可観測グラミアン Q が等しく, かつ対角になる次のような実現である.

$$P = Q = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] \quad (23)$$

ただし, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$ である. P と Q はそれぞれ, 入力から状態への影響の程度および状態から出力への影響の程度を表しているのので, 例えば $\sigma_n \gg \sigma_{n+1}$ である場合, 状態 $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_{n+1} \ \dots \ x_N]^T$ から $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ を取り出すことで対象システムの重要な部分だけを抽出するようなモデル低次元化が行える. この手法を平衡化打切法と呼ぶ.

平衡実現は, 以下の手順によって行うことができる.

1) P と Q のコレスキー分解を行う.

$$P = P_c P_c^T, Q = Q_c Q_c^T \quad (24)$$

2) コレスキー因子の積を特異値分解する.

$$P_c^T Q_c = U \Sigma L^T, \Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] \quad (25)$$

3) 平衡実現変換行列を次式のように構成する.

$$T_b = \Sigma^{\frac{1}{2}} U^T P_c^{-1}, T_b^{-1} = P_c U \Sigma^{-\frac{1}{2}} \quad (26)$$

4) 平衡実現された状態方程式行列は次式のようにになる.

$$A_b = T_b A T_b^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B_b = T_b B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C_b = C T_b^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

低次元化モデルは、単純に A_b, B_b, C_b から主要なハンケル特異値 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ に対応する部分行列を抜き出すことにより、以下のように得ることができる。

$$\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + B_1 u \quad (30)$$

$$y = C_1 \bar{x} \quad (31)$$

式(17),(18)および式(30),(31)の伝達関数表現を

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (32)$$

$$\bar{H}(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \quad (33)$$

と表すと、この低次元化による誤差は次式

$$\|H - \bar{H}\|_\infty \leq 2(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} + \dots + \sigma_N) \quad (34)$$

のように評価することができる⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。ここで、 $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルムである。この平衡化打切法は、式(34)により誤差の上限の評価ができる点が優れているが、2階微分方程式(運動方程式)で表わされる柔軟マルチボディシステムの低次元化には直接には適用することができない。

そこで、次に平衡実現と平衡化打切法の考え方に沿った方法で2階微分方程式(運動方程式)に直接適用可能なグラミアンに基づく低次元化法⁽¹²⁾⁽¹³⁾を示す。式(4),(5)の伝達関数表現は次式のようになる。

$$H(s) = C_e(s^2 M_e + sD_e + K_e)^{-1}B_e \quad (35)$$

このシステムの H_2 ノルムは次式のように表せる。

$$\|H\|_2 = \text{trace}(C_e P_p C_e^T)^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

ここで、 P_p は次のように定義される位置可制御グラミアン⁽¹⁶⁾である。

$$\begin{aligned} P_p &= \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) B_e B_e^T G^*(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、

$$G(j\omega) = (-\omega^2 M_e + j\omega D_e + K_e)^{-1} \quad (38)$$

であり、 G^* は G の複素共役転置である。

工学的な問題では、作用する外力に含まれる周波数の情報が事前に得られる場合が多い。なるべく小さい次元で元のシステムを精度よく近似する低次元化モデルを得るためには、この周波数の情報を用いるべきである。入力と出力に理想的なバンドパスフィルタを適用することにより、ある周波数領域 $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ に注目することがで

きる。このような周波数重みが付加されたシステムの H_2 ノルムは次式のように表せる。

$$\|H\|_2^\omega = \text{trace}(C_e P_p^\omega C_e^T)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

ここで、 P_p^ω は次式のように定義される周波数重み付き位置可制御グラミアンである。

$$\begin{aligned} P_p^\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{-\omega_{\min}} G(j\omega) B_e B_e^T G^*(j\omega) d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} G(j\omega) B_e B_e^T G^*(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (40)$$

この P_p^ω を次のように固有値分解する。

$$P_p^\omega = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (41)$$

モデル低次元化は、主要な固有値 $\Lambda_1 = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ に対応する V_1 を用いて $V = W = V_1$ と定義することにより行うことができる。この低次元による誤差は次式

$$\|H - \bar{H}\|_2^\omega \leq c_1(\lambda_{n+1} + \dots + \lambda_N)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

のように評価することができる⁽¹²⁾。ただし、 c_1 は定数である。このグラミアンに基づく低次元化法は、システムを完全に平衡化するものではないが、平衡化打切法と同様に低次元化による誤差の上限が評価できるという長所がある。また、システムの安定性も保存できることが示されている。しかし、フルオーダーのリアプノフ方程式を解いて $N \times N$ 次元の可制御グラミアンを計算するため計算量が多く、大規模自由度系には適用が困難である。

6. Krylov 部分空間に基づく方法

特異値分解に基づく方法と異なるアイデアの低次元化法として、近年、Krylov 部分空間に基づくモーメントマッチング法が注目されている^{(17)~(19)}。

あるシステムのインパルス応答を $h(t)$ と表す。このとき、次式のように定義される m_i をこのシステムの $s = s_0$ における i 次のモーメントと呼ぶ。

$$m_i = \int_0^\infty t^i h(t) e^{-s_0 t} dt = (-1)^i \frac{d^i}{ds^i} H(s) \Big|_{s=s_0} \quad (43)$$

この m_i は、伝達関数(インパルス応答のラプラス変換) $H(s)$ を $s = s_0$ のまわりに級数展開したときの係数になっている。すなわち、

$$\begin{aligned} H(s) &= m_0 + m_1(s - s_0) + \dots + m_k(s - s_0)^k + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} m_i (s - s_0)^i \end{aligned} \quad (44)$$

モーメントマッチング法では、低次元化モデル

$$\begin{aligned}\bar{H}(s) &= \bar{m}_0 + \bar{m}_1(s-s_0) + \cdots + \bar{m}_k(s-s_0)^k + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \bar{m}_i(s-s_0)^i\end{aligned}\quad (45)$$

のモーメント \bar{m}_i がオリジナルのモデルのモーメント m_i と k 次まで一致するようにする。すなわち、

$$m_i = \bar{m}_i, \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (46)$$

が成り立つように低次元化を行う方法である。このようなモーメントマッチングは、Krylov 部分空間を用いることにより、モーメントを直接計算することなく効率的に行うことが可能である。

行列 $R \in R^{N \times N}$ とベクトル $v \in R^N$ の n 次の Krylov 部分空間は次のように定義される。

$$\mathcal{K}_n(R, v) = \text{span}\{v, Rv, R^2v, \dots, R^{n-1}v\} \quad (47)$$

上式のベクトル v を行列に拡張して $v \in R^{N \times m}$ とすることもでき、このときはブロック Krylov 部分空間と呼ばれる。数値計算によって Krylov 部分空間を構成する場合、上式の定義にしたがって直接計算を行うと丸め誤差の影響で数値的に不安定になるため、通常 Lanczos 法⁽²⁰⁾ や Arnoldi 法⁽²¹⁾ (付録参照) が用いられる。

Krylov 部分空間に基づくモデル低次元化法は、最初 1 階微分方程式 (状態方程式) で表わされるシステムに対して提案された。例えば、式 (17), (18) で表わされるシステムの場合、 V と W を次式

$$\begin{aligned}\text{colspan}\{V\} &= \mathcal{K}_{n_V}((s_0I - A)^{-1}, (s_0I - A)^{-1}B) \\ \text{colspan}\{W\} &= \mathcal{K}_{n_W}((s_0I - A)^{-T}, (s_0I - A)^{-T}C^T)\end{aligned}$$

のように定義することにより、

$$m_i = \bar{m}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n_V - 1 + n_W - 1$$

の条件を満たすモーメントマッチングが実現できることが証明されている⁽¹⁸⁾。

近年、この Krylov 部分空間に基づくモデル低次元化法を 2 階微分方程式 (運動方程式) で表わされる系に対して拡張する研究も活発に行われている。文献⁽²²⁾では、2 次の Krylov 部分空間が定義され、それを用いて式 (4), (5) で表されるシステムに対して直接適用できる低次元化法が提案されている。一方、比例減衰系の場合は、1 階微分方程式 (状態方程式) に対して提案されている方法をわずかな修正で直接適用することができる。

以下では、例として次の不減衰 1 入力系の原点 $s = s_0 = 0$ におけるモーメントマッチングについて考える。

$$M_e \ddot{q} + K_e q = b_e u \quad (48)$$

$$y = C_e q \quad (49)$$

この系に対しては、 V と W を次式

$$\text{colspan}\{V\} = \text{colspan}\{W\} = \mathcal{K}_n(-K_e^{-1}M_e, K_e^{-1}b_e) \quad (50)$$

のように定義することにより、

$$m_i = \bar{m}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

の条件を満たすモーメントマッチングが達成できることを示すことができる。基本的な性質をみるために、 $n=1$ としたときに 0 次のモーメントが一致することを確認してみる。直接計算により、伝達関数は原点を中心として

$$\begin{aligned}H(s) &= C_e(s^2 M_e + K_e)^{-1} b_e \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} C_e (-K_e^{-1} M_e)^i K_e^{-1} b_e s^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} m_i s^{2i}\end{aligned}\quad (51)$$

のように級数展開することができ、0 次のモーメントは

$$m_0 = C_e K_e^{-1} b_e \quad (52)$$

となることがわかる。 $n=1$ の場合、式 (50) より

$$\text{span}\{V\} = \mathcal{K}_1(-K_e^{-1}M_e, K_e^{-1}b_e) = \text{span}\{K_e^{-1}b_e\}$$

となるので、任意の定数 α を用いて $K_e^{-1}b_e = \alpha V$ と書ける。したがって、式 (11) の関係に注意すると

$$\begin{aligned}\bar{m}_0 &= \bar{C}_e \bar{K}_e^{-1} \bar{b}_e \\ &= C_e V \cdot (V^T K_e V)^{-1} \cdot V^T b_e \\ &= \alpha C_e V \cdot (V^T K_e V)^{-1} (V^T K_e V) \\ &= C_e (\alpha V) \\ &= C_e K_e^{-1} b_e \\ &= m_0\end{aligned}\quad (53)$$

となり、0 次のモーメントが一致することが確認できる。 $n=2$ 以降の場合についても数学的帰納法によりモーメントが一致することを示すことができる。

さらに、モーメントマッチングによる低次元化の特徴を把握するために数値例を示す。次の 5 自由度系

$$M_e = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 100000. & -50000. & 0 & 0 & 0 \\ -50000. & 100000. & -50000. & 0 & 0 \\ 0 & -50000. & 100000. & -50000. & 0 \\ 0 & 0 & -50000. & 100000. & -50000. \\ 0 & 0 & 0 & -50000. & 50000. \end{bmatrix}$$

$$b_e = \begin{bmatrix} 0 & 100. & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 0 & 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T$$

$$y = \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \end{bmatrix}^T$$

をフルオーダーモデルとし、低次元化の次数 n を 1, 2, 3 と増やしていったときの周波数応答の比較をそれぞれ Fig. 3 から Fig. 5 に示す。ここでは、例として 2 番目の点を加振したときの 3 番目の点の応答を示している。展開点 $s = s_0 = 0$ ($f = 0$ [Hz]) から離れるほど誤差が大きくなっていくこと、次数 n を増やすことによって低次元化による誤差が小さくなり近似の精度が向上していくこと、などの特徴が確認できる。

Krylov 部分空間に基づく低次元化法は、漸化的なアルゴリズムになっているため計算効率がよく、大自由度系にも適用可能であるという長所を持つ。しかし、基本的に局所的な情報に基づく方法であるため、大域的な誤差の上限を見積もることが難しく、一般にシステムの安定性を保存できる保証もないという欠点がある。

7. 最新の研究動向

7.1 特異値分解法と Krylov 部分空間法の併用 特異値分解に基づく方法および Krylov 部分空間に基づく方法は、それぞれ長所と短所を有している。すなわち、特異値分解法は、大域的な誤差の上限が評価でき、システムの安定性が保存できるという長所があるが、計算量が多いため適用できるのが比較的 low 自由度 ($N \leq 100$ 程度) の場合に限られるという欠点がある。一方、Krylov 部分空間法は、漸化的な計算法であるため計算効率が高く大規模自由度系にも適用できるという長所があるが、システムの安定性が保存されず大域的な誤差の上限も見積もることができないという欠点がある。そこで、両者を併用あるいは融合して、欠点を補い長所を活かす方法が検討されている^{(19)(24)~(28)}。例えば、Lehner ら⁽²⁶⁾は、まず Krylov 部分空間法の計算効率の良さをいかして大規模自由度系を 100 自由度程度まで低次元化し、その後、誤差の上限が評価できるなどの望ましい性質をもつ特異値分解法でさらに低次元化するという 2 段階の低次元化法を提案している。

7.2 システムレベルのモデル低次元化法 これまでに述べた方法は、1 つの柔軟ボディに対するモデル低次元化法であったが、最近それらの考え方を発展させた

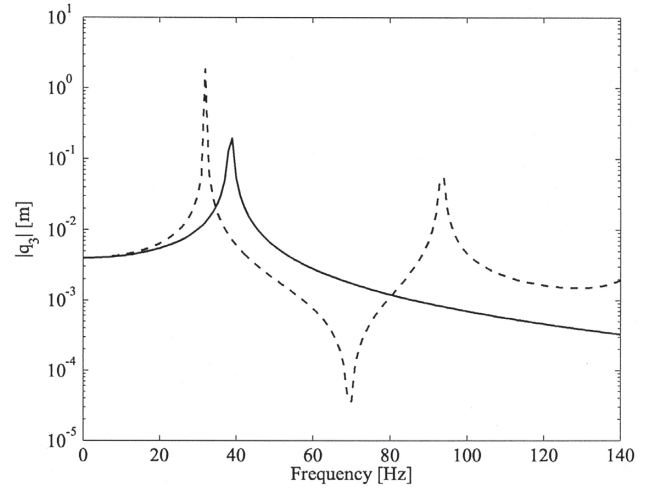


Fig. 3 Frequency response for $n = 1$.

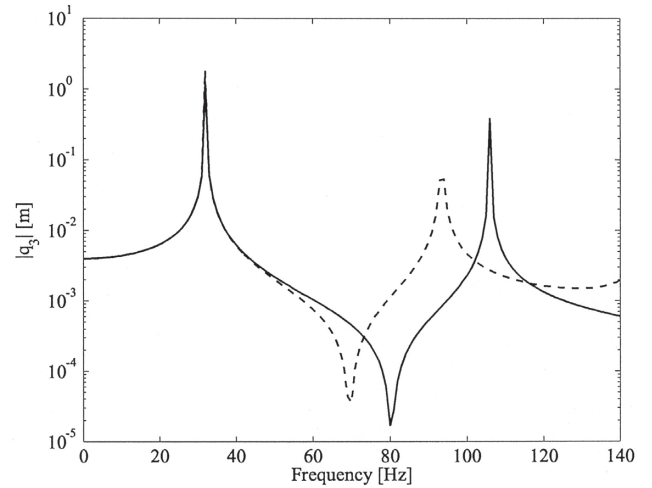


Fig. 4 Frequency response for $n = 2$.

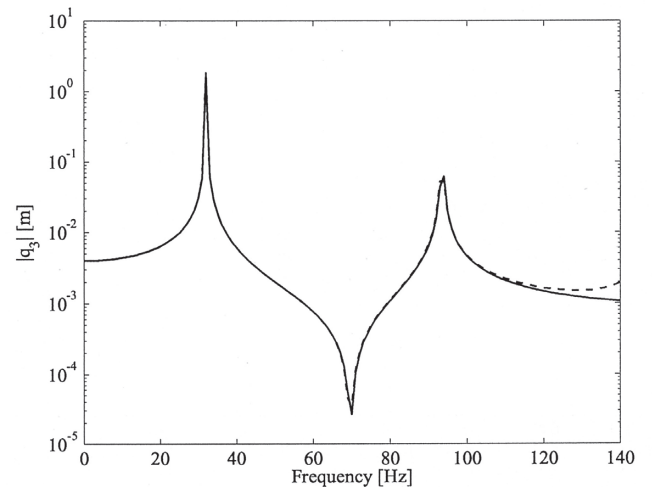


Fig. 5 Frequency response for $n = 3$.

システムレベルのモデル低次元化法もいくつか提案されている。

Bruls ら⁽²⁹⁾は、シミュレーション時間の短縮を目的として Global Modal Parameterization (GMP) 法と呼ばれるシステムレベルのモデル低次元化法を提案している。彼らは、剛体運動の自由度が比較的小さく、弾性変形も微小な場合について考え、システムの運動をジョイント拘束を満たす剛体運動とそれに対する変形に分離している。そして、剛体運動のコンフィグレーション空間を離散化し、各グリットで質量行列、剛性行列、振動モード等をオフラインで計算し、モデル低次元化を行なっている。そして、シミュレーション実行時は、オフラインデータを補間して用いることで実時間シミュレーションを達成している。しかし、本手法では剛体運動の自由度が増加するにつれて、オフライン計算量が増大し、データ記憶のためのストレージも膨大になるという問題がある。

一方、Boer ら⁽³⁰⁾は大変形問題にも適用可能なシステムレベルのモデル低次元化法を提案している。まず、GMP 法と同様に解析対象の可動範囲を離散化し、変位の小さな座標を独立変数に選ぶ。そして、変形を幾何伝達関数を用いて表現し、独立変数のみの運動方程式を導出している。その後、 j 番目の離散化点で運動方程式を線形化し、固有振動数と振動モードを計算して最初の r 個の振動モードから射影行列 $V^{(j)}$ を構成している。さらに $V^{(j)}$ を $Q^{(j)} = V^{(j)}W^{(j)}$, $W^{(j)} = \text{diag}[\omega_1^{-a}, \dots, \omega_r^{-a}]$ のように固有振動数によって重み付けし、 $Q^{(j)}$ を集めて Q を作る。そして Q を特異値分解して主要な特異値に対応する特異ベクトルから V を構成し、それによって一般化座標を低次元化している。この方法は有用であると考えられるが、現状では平面問題に対する定式化となっている。

7.3 実システムへの応用 モデル低次元化法の実問題への応用に関する研究も進められている。

Do ら⁽³¹⁾は、歯車の弾性を考慮したマルチボディダイナミクス解析について検討している。現在、多くの商用マルチボディダイナミクスコードでは、歯車を剛体としてモデル化し、接触力をばねで表現しているが、そのような剛体モデルと有限要素モデルの接触力を比較すると大きく異なっている場合がある。有限要素法を用いて非線形過渡解析を行えば精度のよい解が得られるが膨大な時間を要する。そこで、フローティングフレーム法とモード解析に基づく低次元化法を用いた弾性歯車のマルチボディダイナミクス解析手法を開発している。かさ歯車のような特殊な側面形状をもつ場合でも実用的な計算時間で精度の良い解が得られることを確認している。

Recuero ら⁽³²⁾は、鉄道車両とレールの連成を考慮したマルチボディダイナミクス解析を行なっている。軌道に

沿った経路パラメータを導入し、レールは有限要素法によってモデル化している。その後、フローティングフレーム法を用いて式 (3) と類似の形のレール運動方程式を導出している。そして、Krylov 部分空間法を用いてレールの変形モードを選択し、低次元化を行うことで精度の良いシミュレーションが行えることを示している。

Naets ら⁽³³⁾は GMP 法を車両運動解析に応用することを考えている。まず、車両をいくつかのサブシステムに分割し、剛体運動の自由度を小さくした後、各サブシステムに GMP 法を適用している。その後、有限要素法で用いられるスーパーエレメント法、Graig-Bampton 法の考え方を応用して各サブシステムの結果を統合することにより実時間シミュレーションを達成している。

8. お わ り に

本論文では、柔軟マルチボディダイナミクスのためのモデル低次元化法についてサーベイを行なった。これまでに提案されている様々な方法の考え方や特徴を整理するとともに、最新の研究動向についてもまとめた。モデル低次元化は柔軟マルチボディダイナミクス解析の成否を左右する重要な要素の一つであるため、今後も活発に研究が行われるであろう。

謝 辞

モデル低次元化についてご指導を賜りました Peter Eberhard 教授 (University of Stuttgart) と Joerg Fehr 博士 (TRW Automotive) に謝意を表します。

文 献

- (1) A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, 2005.
- (2) R. Schwertassek, O. Wallrapp. *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Braunschweig Vieweg, 1999.
- (3) C. Villmagne, R.E. Skelton. Model reduction using a projection formulation. *International Journal of Control*, 46, pp.2141-2169, 1987.
- (4) W.K. Gawronski. *Dynamics and Control of Structures - a Modal Approach*. Springer, Berlin, 1998.
- (5) S. Volkwein. Proper Orthogonal Decomposition and Singular Value Decomposition. *Technical Report SFB-153*, Institute of Mathematics, University of Graz, 1999.
- (6) A.J. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige, R.C. Ward. Computation of System Balancing Transformations and Other Applications of Simultaneous Diagonalization Algorithms. *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-32, pp. 115-122, 1987.
- (7) B. Moore. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26, pp. 17-31, 1981.
- (8) K. Glover. All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L^∞ -error Bounds. *International Journal of Control*, 39, pp.1115-1193, 1984.

- (9) 野波, 西村. MATLAB による制御理論の基礎. 東京電気大学出版局, 1998.
- (10) 大日向, アンダーソン. 制御システム設計: コントローラの低次元化. 朝倉書店, 1999.
- (11) K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N.J., 1996.
- (12) D.C. Sorensen, A.C. Antoulas. On Model Reduction of Structured Systems. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, P. Benner, G. Golub, V. Mehrmann, D.C. Sorensen, (eds.), pp. 83-115, Springer, 2005.
- (13) J. Fehr, P. Eberhard, M. Lehner. Improving The Reduction Process in Flexible Multibody Dynamics by Use of 2nd Order Position Gramian Matrices. *ENOC 2008*, Saint Petersburg, Russia, 2008.
- (14) A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM Publications, Philadelphia, 2005.
- (15) A.C. Antoulas. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems: An overview. *Technical Report, Rice University*, Houston, 2001.
- (16) D.G. Meyer, S. Srinivasan. Balancing and model reduction for second-order form linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 11, pp.1632-1644, 1996.
- (17) D.L. Boley. Krylov space methods on state-space control models. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 13, pp.733-758, 1994.
- (18) E.J. Grimme. *Krylov Projection Methods for Model Reduction*, Ph.D. Thesis, ECE Dept., University of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.
- (19) I.M. Jaimoukha, E.M. Kasenally. Implicitly restarted Krylov subspace methods for stable partial realization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18, pp.633-652, 1997.
- (20) C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Nat. Bureau Stan.*, 45, pp.255-282, 1950.
- (21) W.E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eignvalue problem. *Quart. Applied Math.*, 9, pp.17-29, 1951.
- (22) Z. Bai, Y. Su. Dimension reduction of second-order dynamical systems via a second-order Arnoldi method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26, pp.1692-1709, 2005.
- (23) M. Lehner, P. Eberhard. On the use of moment-matching to build reduced order models in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 16, pp. 191-211, 2006.
- (24) A.C. Antoulas, D.C. Sorensen. Projection methods for balanced model reduction. *Technical Report, Rice University*, Houston, 2001.
- (25) A.S. Hodel, R.B. Tenison, K. Poola. Numerical solution of large Lyapunov equations by approximate power iteration. *Linear Algebra Appl.*, 236, pp. 205-230, 1996.
- (26) M. Lehner, P. Eberhard. A two-step approach for model reduction in flexible multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 17, pp. 157-176, 2007.
- (27) J. Fehr, P. Eberhard. Improving the Simulation Process in Flexible Multibody Dynamics by Enhanced Model Order Reduction Techniques. *Multibody Dynamics 2009, Eccomas Thematic Conferene*, K. Arzewski, J. Fraczek, M. Wojtyra (eds.), Warsaw, Poland, 2009.
- (28) J. Fehr. *Automated and Error Controlled Model Reduction in Elastic Multibody Systems*, Ph.D. Thesis, ITM, University of Stuttgart, 2011.
- (29) O. Bruls, P. Duysinx, J.C. Golinval. The global modal parameterization for non-linear model order reduction in flexiblemultibody dynamics. *Int. J. Numer.Meth. Engng.*, 29(5), pp. 948-977, 2007.
- (30) S.E. Boer, D. Hoopen, R.G.K.M. Aarts, W.B.J. Hakvoort, J.B. Jonker. Model reduction for efficient time-integration of planar non-linear flexible multibody models. *Proc. of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, 10pages, 2012.
- (31) T.P. Do, P. Ziegler, P. Eberhard. Simulation of elastic gears with non-standard flank profiles. *Proc. of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, 8pages, 2012.
- (32) A.M. Recuero, J.L. Escalona, R. Chamorro. Coupled railroad vehicle-track dynamics using Krylov subspaces and the moving mode shapes method. *Proc. of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, 10pages, 2012.
- (33) F. Naets, W. Desmet. Connected sub-system global modal parameterization for efficient simulation of complex flexible multibody systems. *Proc. of the 2nd Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, 8pages, 2012.

付録 : Arnoldi 法

Arnoldi 法⁽²¹⁾は, 零でないベクトル \mathbf{v} と行列 \mathbf{R} が与えられたとき, 次のような正規直交基底 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を生成する計算法である.

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \\ = \text{span}\{\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{R}^{k-1}\mathbf{v}\} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

具体的なアルゴリズムは以下のようになる.

```

 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ 
for  $k = 1, 2, \dots, n-1$ 
   $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{R}\mathbf{v}_k$ 
  for  $j = 1, 2, \dots, k$ 
     $h_{jk} \leftarrow \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_{k+1}$ 
     $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} - h_{jk}\mathbf{v}_j$ 
   $h_{k+1,k} \leftarrow \|\mathbf{v}_{k+1}\|$ 
  if  $h_{k+1,k} = 0$ 
    set flag(span $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  is
                                invariant under  $\mathbf{R}$ )
  exit
 $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} / h_{k+1,k}$ 
end

```

例えば, 式 (50) の

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_n(-\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{M}_e, \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{b}_e)$$

という計算を行いたい場合は, $\mathbf{v} = \mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{b}_e$, $\mathbf{R} = -\mathbf{K}_e^{-1}\mathbf{M}_e$ として上記の Arnoldi 法を適用することにより, $\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ となる \mathbf{V} を得ることができる.