

柔軟機械構造物の強度的安全性を考慮した最短時間軌道計画*

岩村 誠人**

尾崎 弘明**

Time Optimal Trajectory Planning of Flexible Mechanical Structures Considering Structural Safety

Makoto IWAMURA and Hiroaki OZAKI

This paper deals with time optimal trajectory planning of flexible mechanical structures considering constraints caused by structural safety. A simple model which is a rigid main body equipped with a flexible beam is investigated. To solve the constrained optimal control problem, an iterative algorithm called a hierarchical gradient method is employed. The effectiveness of the proposed optimal control scheme is verified by simulations.

Key Words : Flexible Mechanical Structures, Time Optimal Control, Trajectory Planning, Structural Safety

1. はじめに

近年、各種の機械に対して、高速化、省エネルギー化、低コスト化の要求がますます強くなってきている。その結果、機械構造物は軽量化され、柔軟になる傾向にあり、運動中や位置決めの際に発生する振動の影響を無視できない場合が多くなってきている。そのため、柔軟機械構造物の振動特性を考慮した制御手法について様々な研究が行われている。本研究では、特に産業界からの要請が強い、柔軟機械構造物を高速かつ安全に移動させるための制御手法について検討する。

振動特性を考慮した制御手法に関する研究として、竹本ら⁽¹⁾は高速搬送システムの振動制御問題を、また種ら⁽²⁾は柔軟ロボットマニピュレータの軌道生成問題を検討している。しかし、それらの研究では、移動時間の短縮については積極的に考慮されていない。一方、宇宙工学の分野では、柔軟宇宙構造物の最短時間制御問題について活発に研究が行われている。Singhら⁽³⁾は、柔軟宇宙構造物の最短時間スルーマヌーバ問題について検討し、振動を励起しないロバスト制御法を提案している。しかし、彼らの研究では、運動中に柔軟機械構造物に作用する負荷については全く考慮されていない。柔軟機械構造物が破壊することなく位置決め終了後も所望の性能を発揮するためには、運動中に作用する力やモーメントが許容される値を超えないようにする必要がある。小島ら⁽⁵⁾

は、そのような観点から運動中に作用する曲げモーメントの時間積分値を最小にする最適制御問題を定式化し、岩村らが提案している階層勾配法⁽⁴⁾を用いて数値的に最適解の解析を行っている。しかし、彼らの研究では、移動時間の短縮については考慮されていない。小松ら⁽⁶⁾も同様に、ロボットマニピュレータの機構強度を考慮して危険な姿勢を回避する動作計画手法を提案しているが、動作時間の短縮については検討していない。

そこで、本論文では、柔軟機械構造物の高速性と強度的安全性を同時に考慮することのできる制御手法について検討する。ここでは、Fig. 1 に示す簡単な柔軟機械構造物を対象とし、運動中に作用する曲げモーメントに制約を設け、その制約下で最短時間制御を行うことを考える。この問題は、数値的にも解くことが困難な、終端時刻自由、制約条件付き最適制御問題となるが、著者らは既に階層勾配法をこのような問題に対しても適用できるように拡張している⁽⁷⁾。そこで、本論文では拡張された階層勾配法を用いて、最適解の解析を行うことを試みる。数値シミュレーションによって、曲げモーメントの制約を満足する解が得られることを確認する。

2. 問題の定式化

本論文では Fig. 1 に示すような剛体台車とその上に固定された梁からなる最も単純な柔軟機械構造物を対象とし、初期位置で静止した状態から、曲げモーメントの制約を満足しつつ目標位置まで最短時間で到達させる問題を検討する。図において、 y_0 は台車の位置を表す固定座

* 平成 24 年 5 月 31 日受付

** 機械工学科

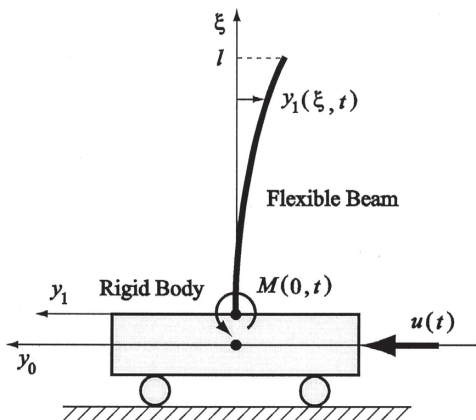


Fig. 1 A simple model of flexible mechanical structures

標系, (ξ, y_1) は台車上に固定された移動座標系である。梁は均一でその変形は小さいものと仮定する。また、制御入力 $u(t)$ は台車だけに作用するものとする。このとき台車位置および柔軟梁の変位に関する平面運動の運動方程式は次式のようになる。

$$(m_0 + \rho l)\ddot{y}_0(t) + \rho \int_0^l \frac{\partial^2 y_1(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi = u(t) \quad (1)$$

$$\rho \ddot{y}_0(t) + \rho \frac{\partial^2 y_1(\xi, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y_1(\xi, t)}{\partial \xi^4} = 0 \quad (2)$$

ここで、 m_0 は台車の質量、 ρ, l, E, I はそれぞれ梁の線密度、長さ、ヤング率、断面二次モーメントである。ただし、梁は一端が台車に固定された片持ち梁であるので次の境界条件を満足する必要がある。

$$y_1 = \frac{\partial y_1}{\partial \xi} = 0 \text{ at } \xi = 0, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 y_1}{\partial \xi^3} = 0 \text{ at } \xi = l$$

ここでは、簡単のために梁の1次固有モードのみを考慮することとし、梁の変位を以下のように表す。

$$y_1(\xi, t) = \phi_1(\xi)q_1(t) \quad (3)$$

ここで、 $\phi_1(\xi)$ は1次固有モードを表す主関数

$$\phi_1(\xi) = c\{(\cosh \lambda_1 l - \cos \lambda_1 l)(\cosh \lambda_1 \xi - \cos \lambda_1 \xi) - (\sinh \lambda_1 l - \sin \lambda_1 l)(\sinh \lambda_1 \xi - \sin \lambda_1 \xi)\}$$

であり、 $\lambda_1 l = 1.875$ である。任意定数 c は次式の正規条件を満足するように決めるものとする。

$$\int_0^l \phi_1^2(\xi) d\xi = l$$

また、 $q_1(t)$ は1次モード変位である。(3)式を(1),(2)式に代入して整理すると次式を得る。

$$\ddot{y}_0(t) + \rho \beta_0 \int_0^l \phi_1(\xi) d\xi \cdot \ddot{q}_1(t) = \beta_0 u(t) \quad (4)$$

$$\ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \beta_1 u(t) \quad (5)$$

ただし、 $\beta_0 = 1/(m_0 + \rho l)$, ω_1, β_1 はそれぞれ1次固有角振動数、1次モードゲインである。ここで、状態変数 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ を

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_0(t) + \rho \beta_0 \int_0^l \phi_1(\xi) d\xi \cdot q_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) &= q_1(t) \\ x_4(t) &= \dot{x}_3(t) \end{aligned}$$

のように選べば、次の状態方程式を得る。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (6)$$

ただし、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \\ 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

である。制御入力は次のように制限されるとする。

$$|u| \leq u_{\max} \quad (7)$$

初期位置を原点とし、目標位置 y_{0d} で再び静止させる問題を考えると境界条件は次のようになる。

$$x(0) = (0, 0, 0, 0)^T, \quad x(t_f) = (y_{0d}, 0, 0, 0)^T \quad (8)$$

また、梁の位置 ξ における時刻 t の曲げモーメントは

$$M(\xi, t) = EI \frac{\partial^2 y_1(\xi, t)}{\partial \xi^2}$$

と表せるので、上式に(3)式を代入して値が最も大きくなる根元の曲げモーメントを評価すれば

$$M(0, t) = 2EIc\lambda_1^2 (\cosh \lambda_1 l + \cos \lambda_1 l) q_1(t)$$

となる。ここでは、この最大曲げモーメントに次のような制約を課すことにする。

$$|M(0, t)| \leq M_{\max} \quad (9)$$

評価汎関数は、動作時間を短縮することを目的とし、

$$J = t_f = \int_0^{t_f} dt \quad (10)$$

のように定義する。

このとき問題は、(6)式で表される制御対象に対して、(7)式の制御制約、(8)式の境界条件、および(9)の状態制約を満たし、(10)式の評価汎関数を最小にする制御入力 $u(t)$ を見出すこととなる。

3. 階層勾配法

階層勾配法は以下のように定式化される制約条件付き最適制御問題を解くために開発された手法である⁽⁴⁾.

$$\min_u J = \int_0^{t_f} f_0(x(t), u(t)) dt \quad (11)$$

$$\text{subj. to } \dot{x} = f(x(t), u(t)), x(0) = x_0 \quad (12)$$

$$r_i = g_i(x(t)) = 0 \quad (i = 1, \dots, l) \quad (13)$$

$$|u_j(t)| \leq u_{j\max} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (14)$$

ここで, $x(t)$ は n 次元状態ベクトル, $u(t)$ は m 次元制御ベクトル, r_i は n_i 次元状態制約ベクトルである. 終端時刻 t_f は固定/自由いずれであってもよい.

解法の基本方針は従来の勾配法と同様である. すなわち, はじめに適当な制御入力 $u^0(t)$ を仮定し, それを

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) + \delta u^k(t) \quad (15)$$

のように繰り返し修正していき, 設定した収束条件を満足した場合に解とする. 上式における修正量 $\delta u(t)$ の計算方法の違いによって, 最急勾配法や共役勾配法など様々なアルゴリズムが提案されている. 制約条件を有する問題の場合は, 通常スラック変数法やペナルティ法などの制約条件のない問題に変換する手法が用いられる. しかし, 前者は適用できる問題が限られており, 後者は一般に収束性が悪く解の精度に問題がある.

そこで, 階層勾配法ではこの修正量 $\delta u(t)$ を次のように計算する. すなわち, まず制約条件の間に優先順位を導入し, 順位の高い制約条件から優先的に満足させるように収束速度を決定していく. その際, 制約条件間の干渉を考慮して階層的に収束速度を決定することによって収束性の向上を図る. 以下では, まず終端時刻が固定され, 制御入力に制約がない場合の修正量の計算法について説明する. その後, 終端時刻が自由な場合, 制御制約がある場合への拡張について簡単に述べる.

3-1 修正量の計算法 まず, 終端時刻が固定され, 制御入力に制約がない場合について説明する. 簡単のために (13) 式の状態制約は 2 つ ($l=2$) とし, $r_1=0$ が $r_2=0$ よりも重視されるというように優先順位が与えられるものとする.

任意に与えた $u(t)$ に対して (12) 式は唯一解 $x(t)$ を持つ. これを $x(t; u)$ と書くことにすれば (13) 式は

$$r_i(u) = g_i(x(t; u)) \quad (i = 1, 2)$$

と表せる. 汎関数 $r_i(u)$ がフレッシュ微分可能であるとすると, 次のように展開することができる.

$$r_i(u + \delta u) = r_i(u) + r'_i(u) \delta u + o(\|\delta u\|)$$

ここで, $r'_i(u)$ は r_i の u におけるフレッシュ導関数である. 上式より, $\|\delta u\|$ が十分小さいと仮定すると

$$\delta r_i = L_i(u) \delta u \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

という関係を得る. ただし, $\delta r_i \equiv r_i(u + \delta u) - r_i(u)$ であり, L_i は次のような線形作用素である.

$$L_i: \delta u \mapsto r'_i(u) \delta u$$

(16) 式に基づいて, $r_1 \rightarrow 0, r_2 \rightarrow 0, J \rightarrow \min$ とする修正量 δu を計算する.

まず優先順位の高い r_1 を零に収束させることを考える. $\delta r_1 = \alpha r_1$ (α : 負定数) とすれば r_1 は零に収束することが保証される. そのような δr_1 を生じさせる δu は通常無数に存在するので誤差ノルム $\|\delta r_1 - \alpha r_1\| = \|L_1 \delta u - \alpha r_1\|$ を最小にする δu の一般解を求めると

$$\delta u = \alpha L_1^\# r_1 + (I - L_1^\# L_1) \delta y \quad (17)$$

となる. ここで, $L_1^\#$ は L_1 の疑似逆作用素, I は m 次元単位行列, δy は m 次元任意ベクトルである. δy は零空間解でありどのように選んでも r_1 の収束に影響を与えないことに注意する.

そこで, 次に r_1 の収束を妨げないように δy を利用して r_2 を零に収束させることを考える. (17) 式を (16) 式の $i=2$ の式に代入すると次式を得る.

$$\delta r_2 = \alpha L_2 L_1^\# r_1 + L_2 (I - L_1^\# L_1) \delta y$$

先の場合と同様に $\delta r_2 = \alpha r_2$ とするため, 誤差ノルム $\|\delta r_2 - \alpha r_2\| = \|L_2 (I - L_1^\# L_1) \delta y - \alpha (r_2 - L_2 L_1^\# r_1)\|$ を最小にする δy の一般解を求めると次式のようになる.

$$\delta y = \alpha \hat{L}_2^\# (r_2 - L_2 L_1^\# r_1) + (I - \hat{L}_2^\# \hat{L}_2) \delta z \quad (18)$$

$$\hat{L}_2 \equiv L_2 (I - L_1^\# L_1)$$

ここで, δz は m 次元任意ベクトルである. よって, (18) 式を (17) 式に代入すれば δu は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \delta u = & \alpha L_1^\# r_1 + \alpha (I - L_1^\# L_1) \hat{L}_2^\# (r_2 - L_2 L_1^\# r_1) \\ & + (I - L_1^\# L_1) (I - \hat{L}_2^\# \hat{L}_2) \delta z \end{aligned} \quad (19)$$

最後に, r_1 と r_2 の収束に影響を与えないように δz を利用してできる限り評価汎関数の値を減少させることを考える. 評価汎関数の勾配は系のハミルトン関数 H の u に関する偏導関数 H_u となる. そこで, 階層勾配法では $\delta z = \alpha H_u$ とする. このように選べば, r_1 と r_2 が零に収束した後は $\delta u = \alpha H_u$ が実現されるので評価汎関数の値が極小値に収束することが保証される.

3.2 終端時刻自由, 制御制約がある場合 終端時刻が自由な場合は, 尾崎⁽⁸⁾によって提案されているタイムスケールファクタを利用する. すなわち, 新しい時間軸 $\tau(0 \leq \tau \leq \tau_f$: 固定) と次のような変数 $\kappa(\tau)$ を導入する.

$$dt = \kappa(\tau)d\tau, \kappa(\tau) > 0$$

この関係を用いて, 時間軸を t から τ に変換すると次のような終端時刻固定問題に帰着することができる.

$$\begin{aligned} \min_u J &= \int_0^{\tau_f} f_0(x(\tau), u(\tau))\kappa(\tau)d\tau \\ \text{subj.to } dx/d\tau &= f(x(\tau), u(\tau))\kappa(\tau), x(0) = x_0 \\ r_i &= g_i(x(\tau)) = 0 \quad (i = 1, \dots, l) \\ |u_j(\tau)| &\leq u_{j\max} \quad (j = 1, \dots, m) \\ \kappa(\tau) &> 0 \end{aligned}$$

この問題を, 拡大制御入力 $\tilde{u}(\tau) = (u_1, \dots, u_m, \kappa)^T$ を求める問題として解き, 得られた κ を用いて時間軸を逆変換すれば元の問題に対する解 $u(t)$ が得られる.

さらに, 制御制約がある場合は, (15) 式の修正式を次のように変更して対処する.

$$\tilde{u}^{k+1}(\tau) = \text{sat}[\tilde{u}^k(\tau) + \delta\tilde{u}^k(\tau)]$$

ただし, $\text{sat}[w]$ は w がその制限値によって飽和することを意味する.

4. 数値シミュレーション

ここでは, 2章で定式化した問題に対して拡張された階層勾配法を適用し, 最適解の解析を行う.

(8) 式の境界条件より, 終端拘束は次式のようなになる.

$$r_1 = (x_1(t_f) - y_{0d}, x_2(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f))^T = 0$$

また, (9) 式の曲げモーメント制約は次のような制約

$$r_2 = \int_0^{\tau_f} h(x(t))dt = 0$$

に変換できる. ただし, $h(x)$ は (9) 式が満たされない場合に正の値をとる次のような関数である.

$$h(x) = \begin{cases} (M(0, t) + M_{\max})^2 & \text{if } M(0, t) < -M_{\max} \\ (M(0, t) - M_{\max})^2 & \text{if } M(0, t) > M_{\max} \\ 0 & \text{the other case} \end{cases}$$

よって, 問題は以下のように定式化することができる.

$$\begin{aligned} \min_u J &= \int_0^{\tau_f} dt \\ \text{subj.to } \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0 \\ r_1 &= (x_1(t_f) - y_{0d}, x_2(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f))^T = 0 \\ r_2 &= \int_0^{\tau_f} h(x(t))dt = 0 \\ |u(t)| &\leq u_{\max} \end{aligned}$$

以下の計算では, $m_0 = 15[\text{kg}]$, $\rho = 0.128[\text{kg/m}]$, $l = 0.96[\text{m}]$, $EI = 1.01[\text{Nm}]$, $y_{0d} = 2[\text{m}]$, $M_{\max} = 0.2[\text{Nm}]$, $u_{\max} = 35[\text{N}]$, $\alpha = -0.02$, $u^0 \equiv 0.1$ とする.

Figs. 2,3 は, 曲げモーメントの制約を考慮せずに最適解を求めた場合の最適制御入力および曲げモーメントの変化である. この場合, 最短動作時間は 1.897[sec] であった. 図より, 制御入力の制約を満たすバンバン制御に近い解が得られているが, 曲げモーメントの制約は満足していないことが分かる. 一方, Figs. 4,5 は, 曲げモーメントの制約を考慮して解いた場合の最適制御入力および曲げモーメントの変化である. この場合, 最短動作時間は 1.950[sec] であった. 図より, 制御入力の制約と曲げモーメントの制約をともに満足する零点付バンバン制御に近い解が得られていることが確認できる.

5. おわりに

本論文では, 柔軟機械構造物の高速性と強度的安全性を同時に考慮する制御問題について検討した. 動作中に作用する曲げモーメントに制約を課し, その制約下で出来る限り早く動作させる問題設定とした. この問題に対して, 先に開発した階層勾配法を適用し最適解の解析を行った結果, 曲げモーメントの制約を満足する解が得られることを確認した. 今後は, より複雑な系に対して提案手法を適用し, 有効性を検証していく予定である.

文 献

- (1) 竹本, 田中, 渡辺, 背戸: 高速搬送システムの運動と振動の制御, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2002 CD-ROM 論文集 (2002).
- (2) 種, 有井, 水本: 固有振動数に基づいた 1 リンク柔軟アームの振動抑制軌道生成法, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2002 CD-ROM 論文集 (2002).
- (3) G. Singh, P.T. Kabamba and N.H. McClamroch: Planar, Time-Optimal, Rest-to-Rest Slewing Maneuvers of Flexible Spacecraft, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 12, No. 1, p. 71-81 (1989).
- (4) 岩村, 山本, 毛利: 複数の拘束条件が課せられる最適軌道計画問題の1数値解法とその非ホロノミック系への適用, 日本ロボット学会誌, 19, 2, p. 260-270 (2001).
- (5) 小島, 中嶋, 藤井: 柔軟宇宙構造物のスルーマヌーバに対する最小曲げモーメント制御-階層勾配法による解析と実験的検証-, 日本航空宇宙学会論文集, 50, 585, p. 387-393 (2002).
- (6) 小松, 磯部: 構造力学的パラメータの導入による機構の破損回避を目的としてマニピュレータの動作計画, 日本機械学会第 18 回計算力学講演会講演論文集, p. 711-712 (2005).
- (7) 岩村, 河野, 尾崎, 毛利: 拘束条件を有する最適制御問題の1数値解法, 計測自動制御学会論文集, 39, 2, p. 127-135 (2003).
- (8) 尾崎, 秀田, 山本, 毛利: 空間経路が指定されるマニピュレータ動作の時間短縮, 計測自動制御学会論文集, 22, 10, p. 1074-1080 (1986).

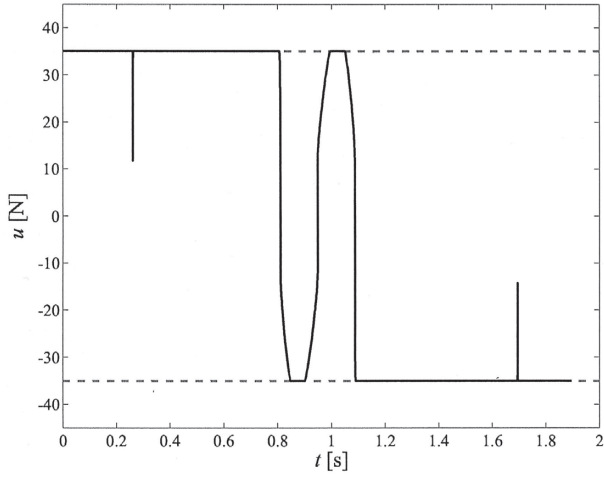


Fig. 2 Optimal control (without moment constraint)

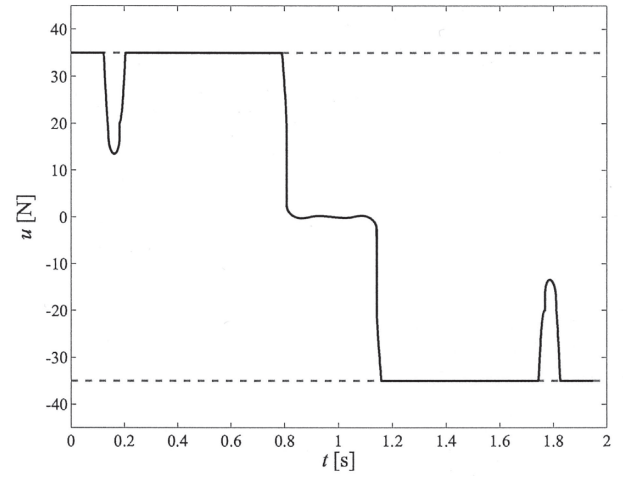


Fig. 5 Optimal control (with moment constraint)

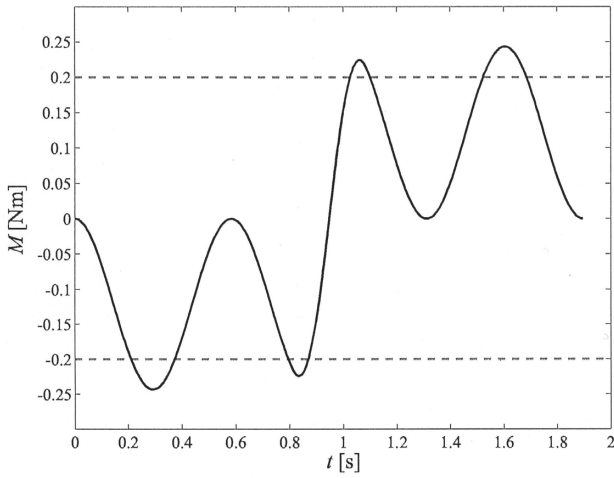


Fig. 3 Bending moment (without moment constraint)

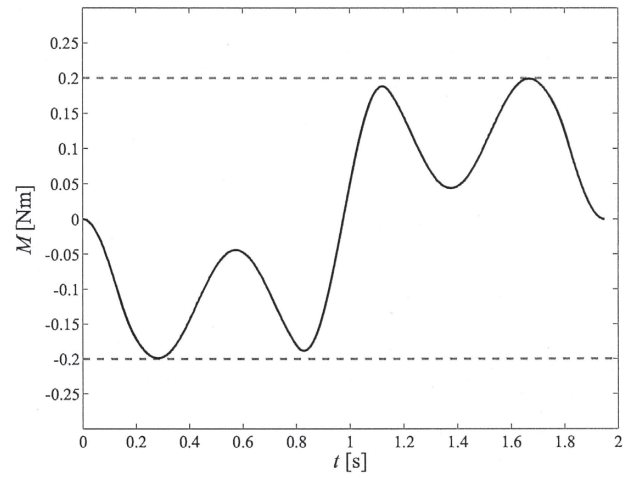


Fig. 6 Bending moment (with moment constraint)

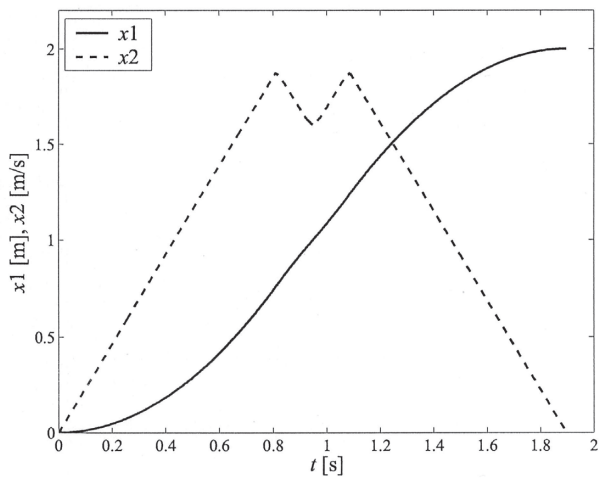


Fig. 4 State trajectories (without moment constraint)

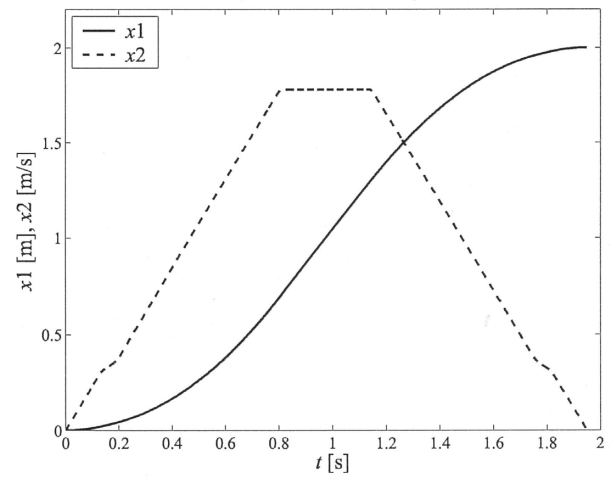


Fig. 7 State trajectories (with moment constraint)