

機械機構のための CAD 最適設計法の提案 *

—運動学上のカム曲線の最適設計—

林 長 軍 **
尾 崎 弘 明 **

An Approach to Optimal Design Method of CAD in Mechanism — Optimal Design of Cam Curves in Kinematics —

Chang-Jun LIN ** and Hiroaki OZAKI **

Cam is one part of mechanical system. Its optimal design is included in computer aided design (CAD). This paper proposes an approach to optimal design method of cam curves in kinematics. In the approach, cam curve is described with a uniform B-spline curve and then the values of B-spline control points are optimized with the Complex Method according to the design purpose. The algorithm is simple and the programming is easy, since it only needs to compute the performance index value but require no gradient of the index in optimization calculation. Several examples of cam curve optimal design are also shown together with a performance comparison between the obtained curves and those applied in engineering practice, in order to illustrate the effectiveness of the approach.

Key Words : CAD, Optimal Design, Cam Curve, Uniform B-spline, Complex Method

1. 緒 言

コンピュータの著しい発展につれて、コンピュータ援用設計⁽¹⁾つまりCAD(Computer Aided Design)は機械設計で多く使われている。一方、NC工作機械技術の飛躍的な発展につれてさまざまな複雑且つ高精度の加工ができ、コンピュータ援用製造生産⁽¹⁾つまりCAM(Computer Aided Manufacturing)ができるようになった。したがって、高精度の設計かつ生産に導入しやすいCAD設計法の開発はCAMにとってもきわめて重要なことである。本研究は機械機構のためにCAD最適設計法を提案する。ここでは、まず機械機構の一つであるカム曲線の最適デザインの方法を検討する。

カムは自動車、印刷機械、工作機械などで多く使用されている機構である。カムの輪郭を設計する際に、通常

まず使用目的に合うカム曲線を選択する。つぎに選んだカム曲線をベースにして、カムの基礎円半径などの機構学パラメータと合わせて実際のカム輪郭を生成する。現在、よく利用されているカム曲線は、運動学の立場から検討され比較的簡単な解析式で表現されるものが多い⁽²⁾。近年、より柔軟にカム輪郭を設計するには、種々なスプライン曲線が有効に利用できることが報告されている⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。しかし、これらの研究では、カム輪郭上の特定点の運動学特性を満足することやカム曲線の連続特性を検討することなどを重点に置き、使用目的にあうようにカム曲線を最適化する方法が明らかにされていない。したがって、得られたカム輪郭が従来のカム曲線による輪郭に比べて優れているとはいいがたい。

本論文では、ユニフォームBスプラインを利用して新しいカム曲線の最適設計法を提案する。この方法では、ユニフォームBスプラインでカム曲線を記述し、カムの使用目的に合うように、コンプレックス法を使用してBスプラインの制御点を最適化する。提案した方法は(1)

* 平成 22 年 11 月 20 日受付

** 機械工学科

Bスプラインは曲線の制御点に対する曲線の確定性, 連続性及び局所制御性をもっていること, (2) コンプレックス法が制御点の最適化に際して勾配の計算を必要としないこと, (3) 得られたカム曲線は制御点で表現しているので, カム加工のための NC データ⁽⁶⁾ が少なく NC 加工に適用しやすいことなどの特長をもっている. ここで提案した方法による得られたカム曲線を従来のカム曲線と比べて, 提案した方法の有効性を示す.

2. カム曲線の最適設計法

2・1 カム曲線の記述

式 (1) を満足する無次元時間 T と無次元変位 S との関係曲線を無次元カム変位曲線 (以下単にカム曲線と略す) と呼ぶ.

$$S = S(T) \quad (0 \leq T \leq 1, 0 \leq S \leq 1, S(0) = 0, S(1) = 1) \quad (1)$$

また, S を T で順次微分したものを V, A, J とし, それぞれ無次元速度, 無次元加速度, 無次元躍動 (以下単に速度, 加速度, 躍動と略す) と呼ぶ. すなわち,

$$\begin{cases} V = V(T) = dS/dT \\ A = A(T) = d^2S/dT^2 \\ J = J(T) = d^3S/dT^3 \end{cases} \quad (2)$$

通常, V, A, J またはそれらの積の極値 (最大値と最小値) を利用してカム曲線の特性を評価する⁽²⁾.

本研究では, n 次ユニフォーム B スプライン (n は奇数) を使用してカム曲線を記述する. すなわち, T の区間 $[0, 1]$ を間隔 ΔT で N 等分し, 第 i 番目の小区間 $[T_i, T_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) における曲線部分を $S_i(T)$ と記すると, $S_i(T)$ は次式で表される.

$$\begin{cases} S_i(T) = \sum_{l=0}^n B_l(u) \hat{S}_{i-(n-1)/2+l} \\ T(u) = T_i + u \Delta T \quad (0 \leq u \leq 1) \end{cases} \quad (3)$$

ここで, $B_l(u)$ と $\hat{S}_{i-(n-1)/2+l}$ はそれぞれ B スプラインの基底関数と制御点である⁽⁷⁾. したがって, 制御点 \hat{S}_j ($j = -(n-1)/2, -(n-1)/2+1, \dots, N+(n-1)/2$) の値を与えれば, $n-1$ 次連続のカム曲線は一意的に定まる.

2・2 評価関数

カム曲線の最適化とは, カムの使用目的に応じて B スプラインの制御点を最適に決めることである. そのため, カム曲線を総合的に評価する指標, つまり評価関数 I を次のように設定する.

$$I = k_{c1}I_{c1} + k_{c2}I_{c2} + \dots + k_{cp}I_{cp} + k_{r1}I_{r1} + k_{r2}I_{r2} + \dots + k_{rQ}I_{rQ} \quad (4)$$

ここで, I_{cp} はカム曲線に課する p 番目 ($p=1, 2, \dots, P$) の

拘束条件に対応する評価項目である. つまり, 最適化目標を満足するカム曲線であれば, それに対応するすべての拘束条件の評価値が 0 でなければならない. 一方, I_{rq} はカム曲線に対する q 番目 ($q=1, 2, \dots, Q$) の非拘束的评价項目であり, その値が小さいほどカム曲線がよいと評価される. また, k_{cp} と k_{rq} はそれぞれ I_{cp} と I_{rq} にかけた重み係数である.

前述したように, 通常カム曲線の特性を V, A, J またはそれらの積の極値の大きさによって評価する. したがって, カム曲線の最適化は次のように取り扱うことができる. まず, カムの使用目的に応じて, 制限値以内に抑える必要があるカム曲線のパラメータを拘束条件として定め, ほかのパラメータを非拘束条件としてその値をできるだけ小さく抑える. そうすると, 拘束条件に対する評価項目は次式のように定義すればよい.

$$I_{cp} = \begin{cases} h_{cp,\max} - h_{cp,\max}^* & \text{if } (h_{cp,\max} > h_{cp,\max}^*) \\ h_{cp,\min}^* - h_{cp,\min} & \text{if } (h_{cp,\min} < h_{cp,\min}^*) \\ 0 & \text{for the others} \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $h_{cp,\max}$ と $h_{cp,\min}$ はカム曲線の定義区間にわたって, 拘束条件に対応するパラメータの最大値と最小値であり, $h_{cp,\max}^*$ と $h_{cp,\min}^*$ はそれぞれ $h_{cp,\max}$ と $h_{cp,\min}$ の制限値である. また, 非拘束的条件に関する評価項目は次式のように定義すればよい.

$$I_{rq} = |h_{rq,\max}| \text{ or } |h_{rq,\min}| \quad (6)$$

I_{rq} にかける重み係数 k_{rq} は問題の特徴に応じて前もって与える定数である. また, I_{cp} にかける重み係数 k_{cp} の値に関しては, サフィックス p の値によって拘束条件の優先順位を示し (つまり p の値が小さいほど最適化計算中にこの拘束条件を優先的に満足すべきものである), 文献 (8) に説明した方法を用いて計算中に自動的に調整する.

2・3 最適化方法

前節に説明したように, 式 (4) の評価関数 I はカム曲線のパラメータの極値に関するものである. その勾配の計算は非常に難しい. そのため, 本論文では, 評価関数値の計算のみで済み, 勾配の計算を必要としないコンプレックス法⁽⁸⁾を用いてカム曲線を最適化する.

普通, カム曲線の場合は, その両端の変位, 速度, 加速度などについて値を指定していることが多い⁽²⁾. つまり, カム曲線に境界条件を課している. このような境界条件の数を n_0 とすると, カム曲線を記述する B スプラインの $N+n$ 個の制御点の中で独立なものは $N+n-n_0$ 個となる. 以下, 説明を簡潔にするために, これらの独立な制御点のセットを制御点ベクトル \hat{S} として記する. すな

わち、 $\hat{S} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_{N+n-n_0})^T$ である。 \hat{S} の値を次のアルゴリズムによって最適化する。

(a) 制御点ベクトルの初期点を \hat{S}_1 として適当に定めた後、次式を用いてほかの $M-1$ 個の初期制御点ベクトル $\hat{S}_2, \hat{S}_3, \dots, \hat{S}_M$ を与える。

$$\begin{aligned} \hat{S}_{m,k} &= \hat{S}_{1,k} + DR \\ (m &= 2, 3, \dots, M; \quad k = 1, 2, \dots, N+n-n_0) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 D は制御点の探索域に対応して設定する値であり、 R は区間 $[-0.5, 0.5]$ の一様乱数である。また、制御点ベクトルの数 M は $M=2(N+n-n_0)$ である。さらに、カウンタ数 K_L を $K_L=0$ とする。

(b) 各制御点ベクトルで定まるカム曲線に対して式 (4) より評価関数 I の値を計算し、評価の最大値 $I^{(m)}$ を与える制御点ベクトル（最大点） $\hat{S}^{(m)}$ と最小値 $I^{(l)}$ を与える制御点ベクトル（最小点） $\hat{S}^{(l)}$ を求める。 $\hat{S}^{(l)}$ を更新するたびに $K_L = K_L + 1$ とする。

(c) 前もって設定した収束判定定数 ε に対して、 $I^{(m)} - I^{(l)} \leq \varepsilon$ のとき $\hat{S}^{(l)}$ を求めた解として計算を終了する。 $I^{(m)} - I^{(l)} > \varepsilon$ のときは、もし K_L が定数 M_L (M_L はあらかじめ与えるある正の整数) になると、初期点 \hat{S}_1 を最小点 $\hat{S}^{(l)}$ で置き換え、(a) へ。そうでないとき、(d) へ。

(d) 最大点 $\hat{S}^{(m)}$ 以外の $M-1$ 個制御点ベクトルの重心 $\hat{S}^{(w)}$ を求める。最大点 $\hat{S}^{(m)}$ と重心 $\hat{S}^{(w)}$ とを結ぶ直線上で改良点 $\hat{S}^{(c)}$ を求め、その評価値 $I^{(c)}$ を計算する。

$$\hat{S}_k^{(w)} = \left(\sum_{m=1}^M \hat{S}_{m,k} - \hat{S}_k^{(H)} \right) / (M-1) \quad (8)$$

$$\hat{S}^{(c)} = \hat{S}^{(m)} + \alpha(\hat{S}^{(w)} - \hat{S}^{(m)}) \quad (9)$$

(e) $I^{(c)} < I^{(m)}$ なら、 $\hat{S}^{(m)}$ を $\hat{S}^{(c)}$ で置き換え、(b) へ。

(f) $I^{(c)} \geq I^{(m)}$ の場合に、 ε' を十分小さな正の値として、 $\alpha \geq \varepsilon$ なら α を $\alpha \times \beta$ で置き換え、(d) へ。 $\alpha < \varepsilon'$ なら α を初期値に戻し、 $\hat{S}^{(w)}$ を $\hat{S}^{(l)}$ で置き換え、(d) へ。

コンプレックス法では、 α の初期値は 1.3、 β は 0.5 がよいとされている。ただし、本アルゴリズムでは、従来のコンプレックス法⁽⁹⁾に対して、ステップ(c)において K_L が M_L になるごとにステップ(a)に戻る手続きを加えている。これは求める解が局所最小値に陥るのを防ぐためである。

3. 最適設計例題

本章では、前章で提案した方法をカム曲線の最適生成に適用して提案した方法の有効性を示す。

3・1 対称性を考慮したカム曲線

従来の設計法において、使用の目的や加工生産性などを考量して、対称性を持つカム曲線が多く設計されてい

る。ここでは、従来のカム曲線を比較するために、まず両停留対称カム曲線の最適生成を行い、得られたカム曲線を従来よく使われている変形台形と変形正弦カム曲線⁽²⁾と比較する。

対称カム曲線は、その中心点 ($T=0.5, S=0.5$) に関して中心対称になるので、 T の区間 $[0, 0.5]$ における曲線部分を最適に生成した後、中心対称原理に基づいて区間 $[0.5, 1]$ における曲線部分が簡単に対称生成できる。したがって、カム曲線の最適化計算における境界条件は次式となる。

$$\begin{cases} S(0) = 0 \\ V(0) = 0 \\ A(0) = 0 \\ S(0.5) = 0.5 \\ A(0.5) = 0 \end{cases}$$

また、カム曲線の記述には 5 次ユニフォーム B スプラインを用いた。すなわち、式 (3) において $n=5$ となり、基底関数 $B_i(u)$ は次式となる。

$$\begin{cases} B_0(u) = (1-u)^5 / 120 \\ B_1(u) = (5u^5 - 20u^4 + 20u^3 + 20u^2 - 50u + 26) / 120 \\ B_2(u) = (-10u^5 + 30u^4 - 60u^2 + 66) / 120 \\ B_3(u) = (10u^5 - 20u^4 - 20u^3 + 20u^2 + 50u + 26) / 120 \\ B_4(u) = (-5u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u + 1) / 120 \\ B_5(u) = u^5 / 120 \end{cases}$$

以下の例において各計算用パラメータの値を $\varepsilon=10^{-12}$ 、 $\varepsilon'=10^{-4}$ 、 $D=1.0$ 、 $M_L=50$ とした。

a) 変形台形カム曲線との比較： 本例題では、変形台形カム曲線と比較するために、変形台形カム曲線の最大速度の値 V_m と最大躍動の値 J_m を提案した方法の拘束条件とし、つまりそれぞれの制限値を $V_m \leq 2.0$ と $|J_m| \leq 61.4$ とした。加速度の極値 A_m を非拘束的条件として最適なカム曲線を求める。得られたカム曲線の特値値及び変位曲線、速度曲線、加速度曲線、躍動曲線を **Table 1** と **Fig.1** に示す。Table 1 に示したように、生成されたカム曲線の最大加速度値 A_m は変形台形カム曲線よりやや小さくなっていることが分かった。なお、表中 N は計算中に使用した、 T の空間 $[0, 0.5]$ における B スプラインの分割数である。Table 2 および Table 3 における N も同様である。

Table 1. Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
Modified trapezoid	2.00	± 4.89	± 61.4
B-spline ($N=7$)	2.00	± 4.869	± 61.397

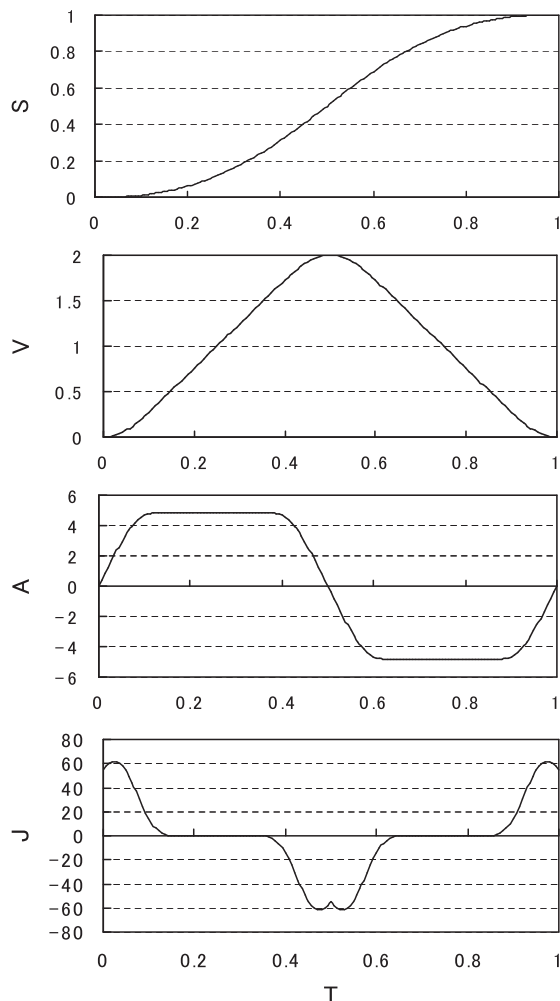


Fig.1. Obtained cam curve with uniform B-spline in consideration of symmetry

b) 変形正弦カム曲線との比較： 本例題では，変形正弦カム曲線と比較するために，変形正弦カム曲線の最大速度の値 V_m と最大加速度の値 A_m を提案した方法の拘束条件とし，つまりそれぞれの制限値を $V_m \leq 1.76$ と $|A_m| \leq 5.53$ とした．躍動の極値 J_m を非拘束的条件として最適なカム曲線を求める．得られたカム曲線の特性値を Table 2 に示す．Table 2 に示したように，生成されたカム曲線の最大躍動の極値 J_m は変形正弦カム曲線の特性値よりも小さくなっていることが分かった．

Table 2. Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
Modified sine	1.76	± 5.53	+69.5 -23.2
B-spline ($N=7$)	1.76	± 5.503	+66.439 -21.614

c) B スプラインの分割数 N について： 本例題では，B スプラインの分割数 N が生成したカム曲線の特性に及ぼす影響を示す．この例では，a) と同じ評価関数を使用し，得られた結果を Table 3 に示している．Table 3 からわかるように，分割数 N が 7 より小さい場合は， N の増加につれて最適化の効果が高くなり，生成したカム曲線の特性がよくなっている．一方， N の値が 7 を越えると， N の増加によるカム曲線の特性の改善効果はほとんど見られない．これは， $N=7$ の場合に求めたカム曲線は，すでに採用した評価関数に対応する最適解に十分近づいており，これ以上 B スプラインの分割数を増やしてもカム曲線の特性の改善効果は望めないことを意味している．

Table 3. Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
B-spline ($N=3$)	2.00	± 5.581	± 61.400
B-spline ($N=4$)	2.00	± 5.177	± 61.400
B-spline ($N=5$)	2.00	± 5.077	± 61.390
B-spline ($N=6$)	2.00	± 4.893	± 61.399
B-spline ($N=7$)	2.00	± 4.869	± 61.397
B-spline ($N=8$)	2.00	± 4.867	± 61.399
B-spline ($N=9$)	2.00	± 4.865	± 61.400
B-spline ($N=10$)	2.00	± 4.864	± 61.399

以上の例題からわかるように，提案した方法を使用すれば，従来よく利用されているタイプのカム曲線と同程度またはその以上により特性のカム曲線を生成することができる．これらの例では，特性の改善が数値的に大きくはないが，変形台形曲線と変形正弦曲線は長い間に理論と実際使用の経験から種々の検討を加えて完成した曲線であり，もとより特性が非常に優れたとされていることを考えれば，カム曲線ないし運動曲線の最適生成にとって以上の例題は提案した方法の有効性をよく示している．

3・2 対称性の考慮としないカム曲線

対称カム曲線設計において，その中心点 ($T=0.5$, $S=0.5$) と T の区間 $[0, 0.5]$ を考慮して生成する．これに対して，ここではその中心点のことを考慮しなく，つまり T の $[0, 1]$ の全空間で最適カム曲線を求める．それに，NC 工作機械技術の飛躍的な発展につれてさまざまな複雑且つ高精度の加工ができるようになったため，現在カム曲線の設計において，その曲線特性さえ良ければ，対称性があるか否かを考慮しない設計が多くなっている．特性値を重視して，Yu ら⁽¹⁰⁾ は高次関数を利用する方法を提案している．その関数は以下ようになる．

$$\begin{cases}
 y_7 = 20T^3 - 65T^4 + 96T^5 - 70T^6 + 20T^7 - (10T^3 \\
 \quad - 50T^4 + 90T^5 - 70T^6 + 20T^7)\beta_7 \\
 y_9 = -(35T^4 - 210T^5 + 490T^6 - 560T^7 + 315T^8 \\
 \quad - 70T^9)\beta_9 \\
 y_{11} = -(126T^5 - 882T^6 + 2520T^7 - 3780T^8 + 3150T^9 \\
 \quad - 1386T^{10} + 252T^{11})\beta_{11} \\
 y = y_7 + y_9 + y_{11}
 \end{cases}
 \quad (9)$$

式 (9) において $\beta_7=0.65$, $\beta_9=-0.665$, $\beta_{11}=1.33$.

ここでは, Yu らの方法と比較するために, その方法によるカム曲線の最大速度の値 V_m と最大躍動の値 J_m を提案した方法の拘束条件とし, つまりそれぞれの制限値を $V_m \leq 1.91$ と $|J_m| \leq 81.0$ とした, 加速度の極値 A_m を非拘束的条件として最適なカム曲線を求める. 得られたカム曲線の特徴値及び変位曲線, 速度曲線, 加速度曲線, 躍動曲線を Table 4 と Fig.2 に示す. Table 4 に示したように, 生成されたカム曲線の最大加速度値 A_m は Yu らの方法によるカム曲線の特徴値より小さくなっていることが分かった. なお, Table 4 中 N は計算中に使用した, T の空間 $[0, 1]$ における B スプラインの分割数である.

Table 3. Characteristic values of cam curve

Curve type	V_m	A_m	J_m
Yu and Lee's Method	1.910	± 4.850	81.000
B-spline ($N=18$)	1.910	± 4.657	81.000

4. 結 言

CAD の最適設計のために, 本論文では, 機械機構の一つであるカムの最適デザインの方法を提案した. この方法はユニフォーム B スプラインを用いてカム曲線を記述し, コンプレックス法を利用して目的に応じて B スプラインの制御点, すなわち, カム曲線を最適化するものである. 提案した方法は (1) B スプラインは曲線の制御点に対する曲線の確定性, 連続性及び局所制御性をもっていること, (2) コンプレックス法が制御点の最適化に際して勾配の計算を必要としないこと, (3) 設計したカム曲線は NC 工作機械に適用しやすいことなどの特長をもっている. また, 現在よく利用されているタイプのカム曲線と比較した結果, 提案方法によるカム曲線は同程度またはその以上により特性をもっていることも確認した.

また, 提案した方法は多数の評価関数が存在する問題に, それら評価関数に対する重み係数を自動に計算することによって, 最適問題に適用しやすい. カム曲線の最適設計だけでなく, 他の機械機構の最適問題にも評価さえあれば, 簡単に適用できる. したがって, CAD の最

適設計法として, 極めて有用な方法であると考えられる.

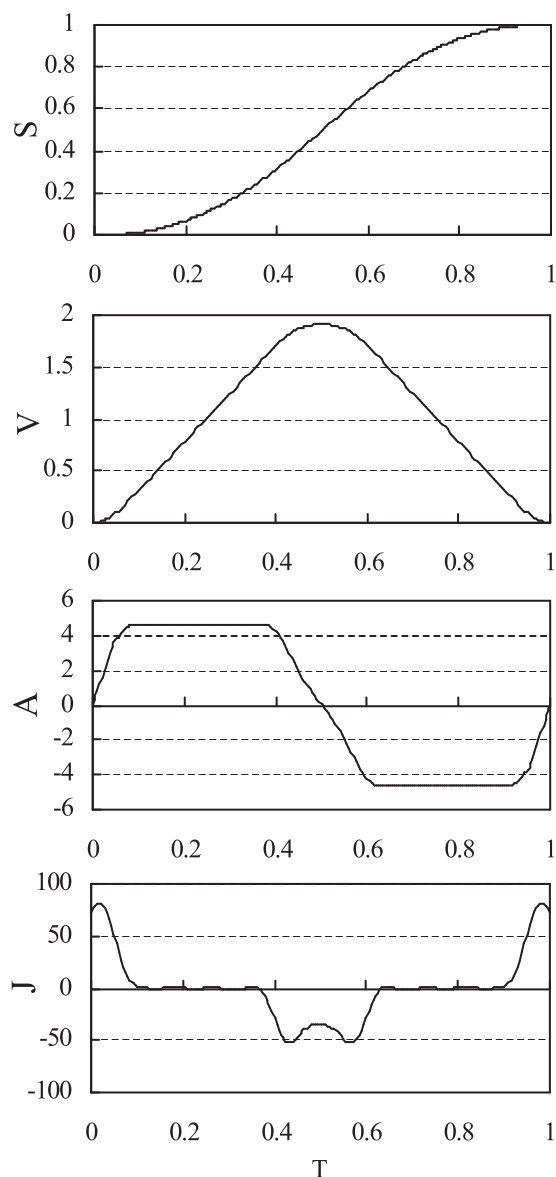


Fig.2. Obtained cam curve with uniform B-spline in non consideration of symmetry

文 献

- (1) 安田仁彦, 図解メカトロニクス入門 CAD/CAM/CAE 入門, (1995), 1-28, オーム社.
- (2) 牧野洋, 自動機械機構学, (1976), 4-41, 日刊工業新聞社.
- (3) D.M.Tsay and C.O.Huey, Cam Motion Synthesis Using Spline Functions, Trans. ASME, J.Mech. Transmiss. Automat. Design, 110-2(1988), 161-165.
- (4) J.Angeles and C.S.Lopez-Cajun, カム機構の最適化, (西岡雅夫訳), (1997), 36-48, 日刊工業新聞社.
- (5) M.Neamtu, H.Pottmann and L.L.Schumaker,

- Designing NURBS Cam Profiles Using Trigonometric Splines, Trans. ASME, J. Mech. Design, 120-2(1998), 175-180.
- (6) 吉川昌範など, 最新機械機器要素技術, (2008), 292-298, (有) エヌジーティー,
- (7) 中嶋孝行・大野敏則, CAD・CG 技術者のための NURBS 早わかり, (1994), 84-94, 工業調査会.
- (8) 尾崎弘明・林長軍, コンプレックス法による動力学を考慮したマニピュレータの障害物回避軌道生成, 日本ロボット学会誌, 15-1(1997), 139-144.
- (9) M.J.Box, A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods, Computer Journal, 8(1965),42-52.
- (10) Q.Yu, H.P. Lee, A new family of parameterized polynomials for cam motion synthesis, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, 117-4(1995), 653-655.