

マルチボディシステムの動力学計算法の高速化*

– $O(N)$ アルゴリズムの導出 –

岩村 誠人**

Werner SCHIEHLEN***

Acceleration of Dynamics Computational Algorithms for Multibody Systems

– Derivation of an $O(N)$ Algorithm –

Makoto IWAMURA and Werner SCHIEHLEN

Multibody dynamics have a wide range of applications including automobiles, railways, robots, rotating machinery, and so on. In order to conduct dynamics simulation of complex multibody systems, efficient forward dynamics algorithms are needed. The most basic and conventional algorithms have $O(N^3)$ complexities where N is the number of degrees of freedom, due to the explicit computation of inverse of the inertia matrix, while Schiehlen proposed an elegant algorithm with $O(N^2)$ complexity based on a representation through recursive formulation of kinematic and dynamic relationships. In this paper, we develop a new algorithm for further acceleration of the forward dynamics computation by modifying the Schiehlen's method. The algorithm achieves $O(N)$ complexity and has the short and compact description that leads to easy maintainability of the program.

Key Words : Multibody System Dynamics, Recursive Formulation, $O(N)$ Algorithm, Complexity Reduction

1. はじめに

マルチボディダイナミクスとは、多数の物体や部品がジョイントや力要素を介して相互に関連した複雑な動きをなす機械システムの運動計算理論とシミュレーション技術に関する学問であり、近年急速に発展してきている計算力学の一分野である^{(1)~(10)}。計算機能力が飛躍的に向上した現在では、非常に複雑な機械システムの動力学シミュレーションを行うことも可能になってきており、製品の解析・設計・評価に不可欠な技術になりつつある。しかし、今後マルチボディダイナミクスの技術をものづくりの高効率化のためのツールとして確立し、従来の CAD, CAE などと融合、統合していくためには、解決しなければならない課題も多い。

マルチボディシステムのシミュレーションにおける主要な課題は、モデリングの汎用性と高速化である。マルチボディシステムは、そのトポロジーにより Fig. 1 に示すように、ボディが直列に連結されたチェーン構造、分岐が存在するツリー構造、機構中に閉ループを有するループ構造に分類することができる。また、構成されるボディが剛体とみなせる場合と弾性体として取り扱うべき場合

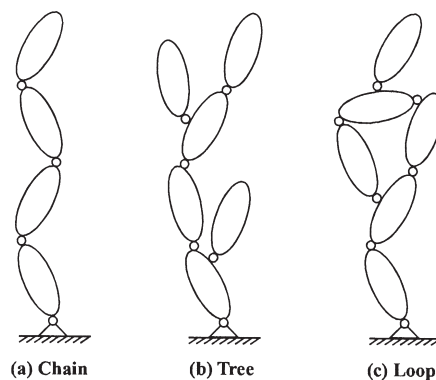


Fig. 1 Topology of multibody systems

があり、さらに、ロボットマニピュレータのように固定したベースを持つ場合と人工衛星のように全体が浮遊している場合などがある。このようにマルチボディシステムといっても多種多様であるため、それらを統一的に表現することができる汎用的なモデリング手法の確立が望まれている。一方、マルチボディダイナミクスが対象とするシステムは、ますます大規模・複雑化してきているため、自由度が増加しても実用的な計算時間でシミュレーションを行うことができる効率のよい動力学計算法が求められている。本論文では、対象を剛体チェーン構造に限定して、動力学計算法の高速化について議論する。

* 平成 22 年 5 月 20 日受付

** 機械工学科

*** University of Stuttgart

自由度 N のマルチボディシステムの運動方程式は、相対座標を用いると一般に次式のように表わせる。

$$M\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{y} \in R^N$ は隣接するボディ間の相対変位で構成される一般化座標ベクトル、 $\mathbf{M} \in R^{N \times N}$ は質量行列、 $\mathbf{k} \in R^N$ は、遠心力やコリオリ力などの慣性力と重力やアクチュエータ駆動力などの外力をまとめたベクトルである。シミュレーションは、上式から未知加速度 $\ddot{\mathbf{y}}$ を求め、それを数値積分することによって行うが、この $\ddot{\mathbf{y}}$ を単純に

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{k} \quad (2)$$

として求めると、 \mathbf{M} の逆行列をとる段階で N^3 のオーダーの演算量が必要になる。これを $O(N^3)$ アルゴリズムと呼ぶ。現在、市販されているプログラムの多くはこの計算法を用いているが、 N が増加するにつれて計算時間が膨大になるという問題がある。

これに対して、Schiehlen は、運動方程式をリカーシブな形で表わすことにより、計算量を従来よりも大幅に低減したエレガントな動力学計算法を提案している⁽²⁾⁽³⁾。しかし、Schiehlen の計算法では、一部にリカーシブに計算できない項が残っていたため、全体の計算量は $O(N^2)$ に留まっていた。そこで、本論文では、Schiehlen の計算法を発展させ、運動方程式の全項をリカーシブに計算できるように再定式化することによって、1CPU によるリアル計算の理論上の最小演算量である $O(N)$ で計算可能な高速な動力学計算アルゴリズムを提案する。提案するアルゴリズムは、非常に簡明な構造になっているため、プログラムの作成やメンテナンスも容易である。

本論文の構成は以下の通りである。まず、第2章では、リカーシブ動力学計算法の基礎を簡潔にまとめる。つづく、第3章では、Schiehlen によって提案されているリカーシブ動力学計算法について説明し、その問題点を指摘する。そして、第4章において、新しい $O(N)$ アルゴリズムを導出し、Schiehlen の計算法との演算量の詳細な比較を行う。第5章は、結論である。

2. リカーシブ動力学計算法の基礎

本論文では、簡単のために N 個のボディが1自由度の回転または直動ジョイントによって直列に連結された剛体チェーン構造について考える。以降の議論は任意の N について成り立つように行うが、行列やベクトルを具体的に表現する際に紙幅の制限で一般的な N について記述することができない場合は、Fig. 2 に示す $N=3$ の場合について表示することにする。

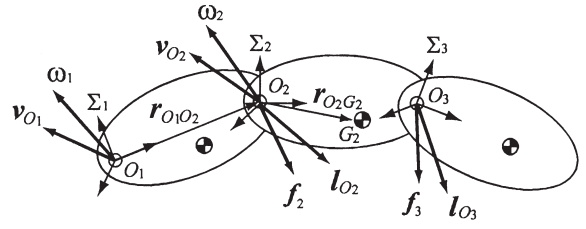


Fig. 2 Kinematic chains

2.1 運動学 ボディ i のボディ $i-1$ に対する相対変位を y_i 、ボディ座標系 Σ_i から観測されたボディ i の並進速度ベクトルを \mathbf{v}_{O_i} 、角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_i$ とすると、隣接するボディの速度の間には次のような関係がある。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{O_i} \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} = \underbrace{\mathbf{S}^{i,i-1} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{r}}_{O_{i-1}O_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{O_{i-1}} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{i-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{T_i} \\ \mathbf{J}_{R_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_i} \dot{y}_i \quad (3)$$

ただし、 $\mathbf{S}^{i,i-1}$ は Σ_{i-1} から Σ_i への6次元座標変換行列、 \mathbf{E} は単位行列、 $\mathbf{r}_{O_{i-1}O_i}$ は Σ_{i-1} 原点から Σ_i 原点へのベクトル、 $\mathbf{J}_{T_i}, \mathbf{J}_{R_i}$ はそれぞれ並進、回転運動に関するヤコビ行列である。チルダ ($\tilde{\cdot}$) は、3次元ベクトルから 3×3 歪対称行列を作り出す演算子であり、次式

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \implies \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

のように定義される。並進速度ベクトルと角速度ベクトルをまとめた6次元ベクトル $\mathbf{w}_i = [\mathbf{v}_{O_i}^T, \boldsymbol{\omega}_i^T]^T$ はツイストと呼ばれる。

ボディ i の並進加速度ベクトルを \mathbf{a}_{O_i} 、角加速度ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}_i$ とすると、隣接するボディ間の加速度の関係は、式(3)を時間で微分することにより、次式

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{J}_i \ddot{y}_i + \boldsymbol{\beta}_i \quad (5)$$

のように表わせる。ただし、 $\mathbf{b}_i = [\mathbf{a}_{O_i}^T, \boldsymbol{\alpha}_i^T]^T$ であり、 $\boldsymbol{\beta}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{J}_i \dot{y}_i$ と定義している。

一方、ジョイントが2つのボディの速度を拘束するとみなせば、以下のように記述することができる。

$$\mathbf{Q}_i^T (\mathbf{w}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{w}_{i-1}) = \mathbf{0} \quad (6)$$

ここで、 \mathbf{Q}_i はジョイントの拘束方向を表わす 6×5 行列である。式(3)と式(6)を比較することにより、 \mathbf{J}_i と \mathbf{Q}_i の間には直交性の関係 $\mathbf{J}_i^T \mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$ が成り立つことがわかる。この性質は、以降の章において利用される。

2.2 運動方程式 ボディ*i*に対して、ニュートン・オイラーの運動方程式を記述し、まとめると次式のようになる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_i \mathbf{E} & m_i \tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i}^T \\ m_i \tilde{\mathbf{r}}_{O_i G_i} & \mathbf{I}_{O_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_i = \text{const}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{O_i} \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} m_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{O_i G_i} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_{O_i} \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{l}_{O_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}_i} \quad (7)$$

ただし、 m_i はボディ*i*の質量、 \mathbf{I}_{O_i} は Σ_i 原点まわりの慣性テンソル、 $\mathbf{r}_{O_i G_i}$ は Σ_i 原点からボディ*i*の質量中心へのベクトル、 $\mathbf{f}_i, \mathbf{l}_{O_i}$ はそれぞれボディ*i*に作用するカベクトルとモーメントベクトルである。カベクトルとモーメントベクトルをまとめた6次元ベクトル $\mathbf{q}_i = [\mathbf{f}_i^T, \mathbf{l}_{O_i}^T]^T$ はレンチと呼ばれ、次のように分割することができる。

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^{(e)} + \mathbf{q}_i^{(r)} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{q}_i^{(e)}$ は作用カベクトルと作用モーメントベクトルを集めたレンチ、 $\mathbf{q}_i^{(r)}$ はジョイントによる拘束カベクトルと拘束モーメントベクトルを集めたレンチである。 $\mathbf{q}_i^{(r)}$ は、ボディ*i*-1からジョイント*i*を介してボディ*i*に加えられるレンチ \mathbf{g}_i と前節で定義したジョイントの拘束方向を表す行列 \mathbf{Q}_i を用いて次式

$$\mathbf{q}_i^{(r)} = \mathbf{Q}_i \mathbf{g}_i - \mathbf{C}_{i+1}^T \mathbf{Q}_{i+1} \mathbf{g}_{i+1} \quad (9)$$

のように表わすことができる。

3. Schiehlen のリカーシブ動力学計算法⁽¹¹⁾⁽¹²⁾

ここでは、Schiehlen によって提案されているリカーシブ動力学計算法について説明する。ただし、次章で提案する計算法との比較を行いやすくするために、表現を若干変更している。

3.1 運動学 式(5)より、全ボディの加速度をまとめると次式のように表わすことができる。

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\beta} \quad (10)$$

ここで、

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。式(10)を \mathbf{b} について解くと次式が得られる。

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{J}}\ddot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\beta}} \quad (13)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{J}} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2 \mathbf{J}_1 & \mathbf{C}_3 \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \mathbf{J}_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (15)$$

である。

3.2 運動方程式 式(7),(8)より、全ボディの運動方程式をまとめると次式のように表わすことができる。

$$\bar{\mathbf{M}}\mathbf{b} + \bar{\mathbf{k}} = \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{q}^{(r)} \quad (16)$$

ここで、

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{k}_N \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{(e)} \\ \mathbf{q}_2^{(e)} \\ \mathbf{q}_3^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(r)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^{(r)} \\ \mathbf{q}_2^{(r)} \\ \mathbf{q}_3^{(r)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N^{(r)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

である。式(9)より、

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_N \end{bmatrix} \quad (19)$$

と定義すると、 $\mathbf{q}^{(r)}$ は次式のように表わすことができる。

$$\mathbf{q}^{(r)} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{g} \quad (20)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{Q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{C})^T \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & -\mathbf{C}_3^T \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_N \end{bmatrix} \quad (21)$$

である。

式 (13) と式 (20) を式 (16) に代入し、両辺に左から \bar{J}^T を乗じると、相対座標によって記述された以下の運動方程式を得る。

$$\underbrace{\bar{J}^T \bar{M} \bar{J}}_M \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\bar{J}^T (\bar{M} \bar{\boldsymbol{\beta}} + \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{q}^{(e)})}_k = \mathbf{0} \quad (22)$$

ただし、式 (14) と式 (21)、および直交性 $J_i^T \mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$ より

$$\bar{J}^T \bar{\mathbf{Q}} = J^T \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} J_1^T \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2^T \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J_3^T \mathbf{Q}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_N^T \mathbf{Q}_N \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (23)$$

という関係が成り立つことを用いた。質量行列を $N = 3$ の場合について具体的に記述すると以下のようになる。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1^T (\mathbf{M}_1 + C_2^T (\mathbf{M}_2 + C_3^T \mathbf{M}_3 C_3) C_2) J_1 \\ J_1^T C_2^T (\mathbf{M}_2 + C_3^T \mathbf{M}_3 C_3) J_2 \\ J_1^T C_2^T C_3^T \mathbf{M}_3 J_3 \\ J_1^T C_2^T (\mathbf{M}_2 + C_3^T \mathbf{M}_3 C_3) J_2 \\ J_2 (\mathbf{M}_2 + C_3^T \mathbf{M}_3 C_3) J_2 \\ J_2^T C_3^T \mathbf{M}_3 J_3 \\ J_1^T C_2^T C_3^T \mathbf{M}_3 J_3 \\ J_2^T C_3^T \mathbf{M}_3 J_3 \\ J_3 \mathbf{M}_3 J_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

上式より、質量行列はガウス変換が適用可能な特殊な形になっていることがわかる。

$N \times N$ 行列 $\mathbf{M} = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_N]$ の第 k 列 $\mathbf{m}_k = [m_{1k}, m_{2k}, \dots, m_{Nk}]^T$ を以下のように変換する行列 \mathbf{G}_k

$$\mathbf{G}_k \mathbf{m}_k = \mathbf{G}_k [m_{1k}, \dots, m_{k-1k}, m_{kk}, \dots, m_{Nk}]^T = [0, \dots, 0, m_{kk}, \dots, m_{Nk}]^T \quad (25)$$

をガウス変換行列と呼ぶ。そのような行列は次式

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_k \mathbf{e}_k^T \quad (26)$$

のように定義することができる。ただし、 \mathbf{e}_k は k 番目の要素が 1 の単位ベクトル、 $\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kk-1}, 0, \dots, 0]^T$ は非零要素が次のように定義されるベクトルである。

$$\alpha_{ki} = m_{ik} / m_{kk} \quad (27)$$

$k = N$ から 2 まで、式 (22) の両辺に左から \mathbf{G}_k を繰り返し乗じることにより、運動方程式を次のような形に変換することができる。

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad (28)$$

ここで、

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} J_1^T \hat{\mathbf{M}}_1 J_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ J_2^T \hat{\mathbf{M}}_2 C_2 J_1 & J_2^T \hat{\mathbf{M}}_2 J_2 & \mathbf{0} \\ J_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 C_3 C_2 J_1 & J_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 C_3 J_2 & J_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 J_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{G} \mathbf{k} \quad (30)$$

である。 $\hat{\mathbf{M}}$ は下三角行列になっており、 $\hat{\mathbf{M}}_i$ は以下の漸化式によりリカーシブに求めることができる。

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{E} - \mathbf{M}_i \mathbf{J}_i (J_i^T \hat{\mathbf{M}}_i J_i)^{-1} J_i^T \quad (31)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{i-1} = \mathbf{M}_{i-1} + C_i^T \mathbf{U}_i \hat{\mathbf{M}}_i C_i \quad (32)$$

また、 \mathbf{G} はガウス変換行列の総積

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3 \cdots \mathbf{G}_N \\ &= (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_2 \mathbf{e}_2^T) (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_3 \mathbf{e}_3^T) \cdots (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}_N \mathbf{e}_N^T) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha'_{21} - \alpha'_{31} \cdots - \alpha'_{N1} \\ 0 & 1 & -\alpha'_{32} \cdots - \alpha'_{N2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots - \alpha'_{N3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33) \end{aligned}$$

であり、対角成分が 1 の上三角行列になっている。 α'_{ki} は既に求められている $\hat{\mathbf{M}}$ の成分を用いて計算することができるが、その計算過程は若干煩雑である。

3.3 アルゴリズムと演算量 加速度 $\ddot{\mathbf{y}}$ は、以下の 3 つのステップにより求めることができる。

- 1) $i = 1$ から N まで、式 (3) により \mathbf{w}_i を求める。速度依存項 $\mathbf{k}_i, \boldsymbol{\beta}_i$ を計算する。
- 2) $i = N$ から 1 まで、式 (31), (32) により $\hat{\mathbf{M}}_i$ を求める。ただし、 $\hat{\mathbf{M}}_N = \mathbf{M}_N$ である。式 (33) により \mathbf{G} を計算する。式 (29) により $\hat{\mathbf{M}}$, 式 (30) により $\hat{\mathbf{k}}$ を求める。
- 3) $i = 1$ から N まで、式 (28) の第 i 式を解いて \ddot{y}_i を得る。

以上の計算法では、質量行列 $\hat{\mathbf{M}}$ が三角行列に分解されているため、式 (28) を解くのに要する演算量は $O(N^2)$ である。全体の演算量を詳細に評価すると次のようになる。

$$\text{乗算: } 43 \frac{1}{2} N^2 + 1133 \frac{1}{2} N - 978 \quad (34)$$

$$\text{加算: } 36 \frac{1}{2} N^2 + 945 \frac{1}{2} N - 833 \quad (35)$$

演算量の評価にはいくつかの方法があるが、ここでは特定のジョイントに特化せずに汎用的に計算を行う場合の演算量を評価している。式 (1) から単純に逆行列を計算して式 (2) のように $\ddot{\mathbf{y}}$ を求める $O(N^3)$ アルゴリズムと比較すると演算量は大幅に低減されている。しかし、大自由度を有するマルチボディシステムのシミュレーションを行う場合は、計算量が自由度 N に比例する $O(N)$ アル

ゴリズムが望ましい。Schiehlen の計算法では、質量行列を三角行列に分解しているが、これを対角行列に変換することができれば、線形方程式を解くのに必要な演算量は $O(N)$ になる。また、 \mathbf{G} を求める計算が煩雑であり、 $\hat{\mathbf{k}}$ をリカーシブに求めることができないことも演算量を増加させている原因の一つである。そこで、次章では、質量行列を対角行列に変換し、 $\hat{\mathbf{k}}$ もリカーシブに計算できるように再定式化することを考える。

4. 提案するリカーシブ動力学計算法

本章では、Schiehlen のリカーシブ動力学計算法を発展させ、新しい $O(N)$ アルゴリズムを導出する。

4.1 運動学 前章では、全ボディの加速度を式 (10) のようにまとめたが、加速度の関係は次式

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{b}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\beta} \quad (36)$$

のように表わすこともできる。ただし、

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_N \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{N-1} \end{bmatrix} \quad (37)$$

である。ここで、 \mathbf{b}_0 はベースの加速度であり、固定ベースの場合は $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0}$ となる。

4.2 運動方程式 式 (36) と式 (20) を式 (16) に代入し、両辺に左から $\bar{\mathbf{J}}^T$ を掛け、直交性 $\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ に注意すると次のような運動方程式を得る。

$$\underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{J} \ddot{\mathbf{y}}}_{\check{\mathbf{M}}^{(0)}} + \underbrace{\bar{\mathbf{J}}^T (\bar{\mathbf{M}} (\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\beta}) + \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{q}^{(e)}) \mathbf{d}}_{\check{\mathbf{K}}^{(0)}} = \mathbf{0} \quad (38)$$

$\check{\mathbf{M}}^{(0)}$ と $\check{\mathbf{K}}^{(0)}$ を $N=3$ の場合について具体的に記述すると以下のようになる。

$$\check{\mathbf{M}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 \\ 0 & \mathbf{J}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_2^T \mathbf{C}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\check{\mathbf{K}}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T (\mathbf{M}_1 (\mathbf{C}_1 \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\beta}_1) + \mathbf{h}_1) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T (\mathbf{M}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{b}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{h}_2) \\ \mathbf{J}_2^T (\mathbf{M}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{b}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{h}_2) \\ 0 \\ \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \\ \mathbf{J}_2^T \mathbf{C}_3^T (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \\ \mathbf{J}_3^T (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \end{bmatrix} \quad (40)$$

ただし、 $\mathbf{h}_i = \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_i^{(e)}$, $\hat{\mathbf{M}}_3 = \mathbf{M}_3$, $\hat{\mathbf{h}}_3 = \mathbf{h}_3$ と定義している。 $\mathbf{d} = [1, 1, 1]^T$ は運動方程式の第 2 項を行列形式で表わすために導入したダミーベクトルである。 \mathbf{d} の定義より、 $\check{\mathbf{K}}^{(0)}$ に関しては、ある成分を同じ行の別の列に移項して加える操作が可能であることを注意する。

以下では、 $N=3$ の場合を例として、アルゴリズムの導出を行う。ガウス変換行列 \mathbf{G}_3 を次のように定義する。

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{E} - \alpha_3 \mathbf{e}_3^T \quad (41)$$

$$\alpha_3 = [\alpha_{31}, \alpha_{32}, 0]^T$$

$$\alpha_{31} = \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 (\mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3)^{-1}$$

$$\alpha_{32} = \mathbf{J}_2^T \mathbf{C}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 (\mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3)^{-1}$$

式 (38) の両辺に左から \mathbf{G}_3 を乗じると次式のようになる。

$$\mathbf{M}^{(1)} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (42)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} &= \mathbf{G}_3 \check{\mathbf{M}}^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2^T \mathbf{M}_2 \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \mathbf{G}_3 \check{\mathbf{K}}^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T (\mathbf{M}_1 (\mathbf{C}_1 \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\beta}_1) + \mathbf{h}_1) \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T (\mathbf{M}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{b}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{h}_2) \\ \mathbf{J}_2^T (\mathbf{M}_2 (\mathbf{C}_2 \mathbf{b}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) + \mathbf{h}_2) \\ 0 \\ \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_3^T \mathbf{U}_3 (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \\ \mathbf{J}_2^T \mathbf{C}_3^T \mathbf{U}_3 (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \\ \mathbf{J}_3^T (\hat{\mathbf{M}}_3 (\mathbf{C}_3 \mathbf{b}_2 + \boldsymbol{\beta}_3) + \hat{\mathbf{h}}_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

であり、 $\mathbf{U}_3 = \mathbf{E} - \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 (\mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3)^{-1} \mathbf{J}_3^T$ と定義している。式 (44) の 1 行 3 列成分と 2 行 3 列成分に $\mathbf{b}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{b}_1 + \mathbf{J}_2 \ddot{\mathbf{y}}_2 + \boldsymbol{\beta}_2$ を代入し、それらの $\ddot{\mathbf{y}}_2$ に関する項をそれぞれ $\mathbf{M}^{(1)}$ の 1 行 2 列成分と 2 行 2 列成分にまとめる。また、 $\ddot{\mathbf{y}}_2$ を含まない項を $\mathbf{K}^{(1)}$ の 1 行 2 列成分と 2 行 2 列成分に加える。得られた式を整理すると次のようになる。

$$\check{\mathbf{M}}^{(1)} \ddot{\mathbf{y}} + \check{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (45)$$

ここで、

$$\check{\mathbf{M}}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1^T \mathbf{M}_1 \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_1^T \mathbf{C}_2^T \hat{\mathbf{M}}_2 \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2^T \hat{\mathbf{M}}_2 \mathbf{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_3^T \hat{\mathbf{M}}_3 \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\check{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} J_1^T (M_1 (C_1 b_0 + \beta_1) + h_1) \\ 0 \\ 0 \\ J_1^T C_2^T (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ J_2^T (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_3^T (\hat{M}_3 (C_3 b_2 + \beta_3) + \hat{h}_3) \end{bmatrix} \quad (47)$$

であり, $\hat{M}_2 = M_2 + C_3^T U_3 \hat{M}_3 C_3$, $\hat{h}_2 = h_2 + C_3^T U_3 (\hat{M}_3 \beta_3 + \hat{h}_3)$ と定義している.

以上と同様の操作を繰り返す. ガウス変換行列 G_2 を次のように定義する.

$$\begin{aligned} G_2 &= E - \alpha_2 e_2^T \\ \alpha_2 &= [\alpha_{21}, 0, 0]^T \\ \alpha_{21} &= J_1^T C_2^T \hat{M}_2 J_2 (J_2^T \hat{M}_2 J_2)^{-1} \end{aligned} \quad (48)$$

式 (45) の両辺に左から G_2 を乗じると次式のようになる.

$$M^{(2)} \ddot{y} + K^{(2)} d = 0 \quad (49)$$

ここで,

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= G_2 \check{M}^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} J_1^T M_1 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^T \hat{M}_2 J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3^T \hat{M}_3 J_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} K^{(2)} &= G_2 \check{K}^{(1)} \\ &= \begin{bmatrix} J_1^T (M_1 (C_1 b_0 + \beta_1) + h_1) \\ 0 \\ 0 \\ J_1^T C_2^T U_2 (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ J_2^T (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_3^T (\hat{M}_3 (C_3 b_2 + \beta_3) + \hat{h}_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

であり, $U_2 = E - \hat{M}_2 J_2 (J_2^T \hat{M}_2 J_2)^{-1} J_2^T$ と定義している. 式 (51) の 1 行 2 列成分に $b_1 = C_1 b_0 + J_1 \dot{y}_1 + \beta_1$ を代入し, その \dot{y}_1 に関する項を $M^{(2)}$ の 1 行 1 列成分にまとめ. また, \dot{y}_1 を含まない項を $K^{(2)}$ の 1 行 1 列成分に加える. 得られた式を整理すると次のようになる.

$$\check{M}^{(2)} \ddot{y} + \check{K}^{(2)} d = 0 \quad (52)$$

ここで,

$$\check{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} J_1^T \hat{M}_1 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^T \hat{M}_2 J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3^T \hat{M}_3 J_3 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\check{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} J_1^T (\hat{M}_1 (C_1 b_0 + \beta_1) + \hat{h}_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_2^T (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_3^T (\hat{M}_3 (C_3 b_2 + \beta_3) + \hat{h}_3) \end{bmatrix} \quad (54)$$

であり, $\hat{M}_1 = M_1 + C_2^T U_2 \hat{M}_2 C_2$, $\hat{h}_1 = h_1 + C_2^T U_2 (\hat{M}_2 \beta_2 + \hat{h}_2)$ と定義している. 式 (52) を整理すると運動方程式は次式のようになる.

$$\check{M} \ddot{y} + \check{k} = 0 \quad (55)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \check{M} &= \check{M}^{(2)} = \begin{bmatrix} J_1^T \hat{M}_1 J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2^T \hat{M}_2 J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3^T \hat{M}_3 J_3 \end{bmatrix} \\ \check{k} &= \check{K}^{(2)} d = \begin{bmatrix} J_1^T (\hat{M}_1 (C_1 b_0 + \beta_1) + \hat{h}_1) \\ J_2^T (\hat{M}_2 (C_2 b_1 + \beta_2) + \hat{h}_2) \\ J_3^T (\hat{M}_3 (C_3 b_2 + \beta_3) + \hat{h}_3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

である.

以上では, $N = 3$ の場合について説明したが, 一般の N の場合も同様に $i = N$ から 2 まで, G_i によるガウス変換と $b_i = C_i b_{i-1} + J_i \dot{y}_i + \beta_i$ の代入整理を繰り返すことにより, 質量行列が対角行列に変換された運動方程式を得ることができる. \hat{M}_i は Schiehlen のリカーシブ動力学計算法におけるものと全く同じであり, 以下の漸化式

$$U_i = E - M_i J_i (J_i^T \hat{M}_i J_i)^{-1} J_i^T \quad (58)$$

$$\hat{M}_{i-1} = M_{i-1} + C_i^T U_i \hat{M}_i C_i \quad (59)$$

により求めることができる. また, \hat{h}_i も次の漸化式

$$\hat{h}_{i-1} = h_{i-1} + C_i^T U_i (\hat{M}_i \beta_i + \hat{h}_i) \quad (60)$$

により計算することができ, その結果, 提案計算法では \check{k} もリカーシブに求めることが可能になっている.

4.3 アルゴリズムと演算量 加速度 \ddot{y} は, 以下の 3 つのステップにより求めることができる.

- 1) $i = 1$ から N まで, 式 (3) により w_i を求める. 速度依存項 k_i, β_i を計算する.

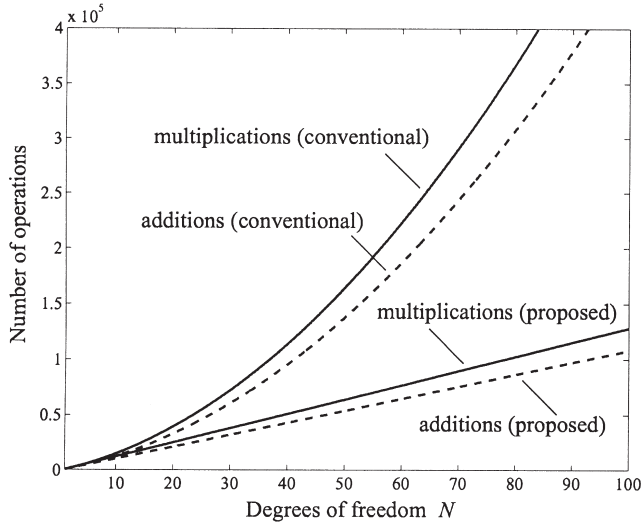


Fig. 3 Comparison of computational costs

2) $i = N$ から 1 まで, 式 (58), (59) により $\hat{\mathbf{M}}_i$, 式 (60) により $\hat{\mathbf{h}}_i$ を求める. ただし, $\hat{\mathbf{M}}_N = \mathbf{M}_N$, $\hat{\mathbf{h}}_N = \mathbf{h}_N$ である.

3) $i = 1$ から N まで, 式 (55) の第 i 式を解いて \ddot{y}_i を求める. $\mathbf{b}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{b}_{i-1} + \mathbf{J}_i \ddot{y}_i + \boldsymbol{\beta}_i$ により \mathbf{b}_i を計算する.

以上の計算法では, 質量行列 $\hat{\mathbf{M}}$ が対角行列に分解されているため, 式 (55) を解くのに要する演算量は $O(N)$ である. 全体の演算量を詳細に評価すると次のようになる.

$$\text{乗算: } 1291N - 900 \quad (61)$$

$$\text{加算: } 1090N - 905 \quad (62)$$

前章と同様に特定のジョイントに特化せずに汎用的に計算を行う場合の演算量を評価している. Fig. 3 に Schiehlen の計算法の演算量 (式 (34), (35)) と提案した計算法の演算量 (式 (61), (62)) の比較を示す. 同図より, N が小さい場合は, 演算量はほぼ同じであるが, N が大きい場合には提案アルゴリズムによってかなりの高速化をはかることができることがわかる.

5. おわりに

本論文では, 剛体チェーン構造を対象として, マルチボディシステムの動力学計算法の高速化について検討した. Schiehlen によって提案されている $O(N^2)$ アルゴリズムを発展させ, 新しい $O(N)$ アルゴリズムを導出した. シミュレーションの高速化は, 結局, 線形方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

をいかに解きやすい形に変形するかという問題であるが, Schiehlen の計算法では上式を LU 分解しているのに対し, 提案計算法では修正 Cholesky 分解を行っていること

に相当する. 提案計算法は, 演算量が少ないという利点に加え, アルゴリズムが非常に簡明であるため, プログラムの作成やメンテナンスが容易であるという長所も有している.

なお, 同様の計算複雑性 $O(N)$ をもつアルゴリズムが既にいくつか開発されているが, 本論文で提案した計算法は, 現在, 最も高速と考えられている Articulated Body Algorithm⁽¹⁰⁾ と比較してもより簡明な形になっていると考えられる. しかし, Articulated Body Algorithm では, 空間速度の概念を用いており, 使用している基礎方程式やアルゴリズムの表記も全く異なるため, このままでは公平な比較を行うことはできない. そこで, 次報では, アルゴリズムの表記を統一して, 両アルゴリズムの詳細な比較を行う予定である.

謝 辞

本論文の内容は, 第一著者が福岡大学長期在外研究員としてドイツ・シュトゥットガルト大学に滞在していた間に行った研究の一部である. 在外研究の機会を与えて下さった福岡大学, 工学部教授会に謝意を表する.

文 献

- (1) W. Schiehlen (ed.). *Multibody Systems Handbook*, Springer, 1990.
- (2) W. Schiehlen (ed.). *Advanced Multibody System Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- (3) W. Schiehlen. *Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives*. *Multibody System Dynamics*, **1**, 149-188, 1997.
- (4) W. Schiehlen, M. Valasek (eds.). *Virtual Nonlinear Multibody Systems*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- (5) W. Schiehlen. *Computational Dynamics: Theory and Applications of Multibody Systems*. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **25**, 566-594, 2006.
- (6) P. Eberhard, W. Schiehlen. *Computational Dynamics of Multibody Systems: History, Formalisms, and Applications*. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **1**, 3-12, 2006.
- (7) 清水信行, 今西悦二郎. マルチボディダイナミクス (1) 基礎理論, コロナ社, 2006.
- (8) A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems, 3rd Ed.*, Cambridge University Press, 2005.
- (9) P.E. Nikravesh. *Planar Multibody Dynamics*, CRC Press, 2007.
- (10) R. Featherstone. *Rigid Body Dynamics Algorithms*, Springer, 2008.
- (11) W. Schiehlen. *Computational Aspects in Multibody System Dynamics*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **90**, 569-582, 1991.
- (12) S.K. Saha, W. Schiehlen. *Recursive Kinematics and Dynamics for Parallel Structural Closed-Loop Multibody Systems*. *Mechanics of Structures and Machines*, **29**, 143-175, 2001.