

応力集中部から進展するき裂の塑性域寸法の解析*

池 田 諭 司**
遠 藤 正 浩***

An Analysis of the Plastic Zone Size of Cracks Emanating from Stress Concentrators

Satoshi IKEDA and Masahiro ENDO

A method was proposed for the calculation of plastic zone size (PZS) at the tip of cracks emanating from stress concentrators subjected to uniform tension. The calculation was made based upon the Dugdale model. In order to provide a general method, a crack at the tip of stress concentrators in an infinite plate was modeled to be equivalent to an edge crack in a semi-infinite plate. The calculated values of PZS for the cracks emanating from circular and elliptical holes, and those of PZS at the edge of elliptical holes without cracks were in reasonable agreement with the accurate values reported by Rich et al. and Nisitani et al. By use of the calculated PZS, the McEvily model was modified for the analysis of the behavior of cracks emanating from circular holes under cyclic loading at a stress ratio of -1. The modified McEvily model accounted successfully for the behavior of cracks near the threshold levels observed by El Haddad et al. in tension-compression fatigue tests of holed steel plates.

Key Words: Plastic Zone Size, Dugdale Model, Mcvily Model, Notch Effect

1. 緒 言

応力拡大係数 K は、き裂やき裂状欠陥を有する物体の強度評価を行う際の力学パラメータとして実績がある。 K の概念は線形弾性論を基礎としているが、小規模降伏条件が満たされる場合には、き裂先端が降伏する場合にもき裂先端近傍の応力場の強さを表すパラメータとして、 K を用いることができる。例えば、高サイクル疲労の多くの問題では K が極めて有効である。しかし、き裂材の強度問題には小規模降伏条件が満たされない問題も多い。例えば、切欠き底に発生した微小疲労き裂は、切欠きによって高い応力が集中した応力場の中を進展するので、切欠き底近傍を進展するき裂の挙動の評価に K をそのまま適用すると危険側の評価となる。

き裂先端に塑性域が生じた場合に、応力・ひずみ、およびき裂先端開口変位を定量的に評価することは一般に容易ではないが、弾完全塑性体のモードⅢき裂については Irwin ら⁽¹⁾による厳密な解析解がある。この結果によれば、塑性域の外の部分の弾性応力分布は、 K で計算される弾性応力分布が塑性域寸法 ω の1/2だけき裂先端の方向に移動したものに等しい。すなわち、き裂長さ c に塑性域寸法 ω の1/2を加えたものを補正き裂長さ c_{mod} とすれば、塑性域外の応力場は c_{mod} の仮想き裂を用いて計算される K によって決まる。モードⅠとⅡについては、この関係は厳密には成立しない。しかし、小規模降伏条件が満たされないき裂の弾塑性挙動を評価する場合に、このき裂長さの置き換えにより線形破壊力学を拡張して用いることができるため、この取り扱いが広く行われている。

塑性域寸法 ω の計算は有限要素法によって計算できるが、有限要素法では解析すべき領域全体を計算対象と

* 平成20年1月7日受付

** 工学研究科機械工学専攻

*** 機械工学科

して要素分割を行う必要がある。き裂の進展などによって形状が変化する場合は、その都度要素分割を行わなければならない。また一般的に応力拡大係数の計算を精度良く行うためには、注目するき裂先端の要素分割に特別の配慮が必要である。これに対して、Dugdaleモデル⁽²⁾を用いればき裂先端近傍に降伏が生じても K に注目して ω を計算できるという利点があり、弾塑性問題でありながら線形弾性解析ができるので計算が容易である。このモデルに基づく ω の計算としては、一様引張りを受ける無限板の中央き裂⁽²⁾、および半無限板の縁き裂⁽³⁾、あるいは無限板の円孔から発生したき裂⁽⁴⁾などがある。

本研究では、任意形状・寸法の応力集中部から発生したき裂の ω をDugdaleモデルに基づいて計算する一般的な方法を提案する。この方法を用いれば、切欠きから発生したき裂が成長する場合に、 ω の値をき裂長さの関数として容易に計算することができる。さらに、このモデルによる計算は小規模降伏の仮定を導入していないので、計算された ω は小規模降伏条件を超えて成立するため、切欠き底のき裂の弾塑性挙動を議論するのに有効である。また、この方法を用いて、McEvilyら⁽⁵⁾が提案した疲労き裂進展モデルを、応力集中部から進展する疲労き裂の問題にも対応できるように拡張して、実験結果との比較による検討を行う。

2. 解析方法

2.1 き裂の結合力モデル

き裂先端の塑性域寸法を小規模降伏状態を超えて評価する方法として、Dugdale⁽²⁾はき裂の結合力モデルを提案した。このモデルでは材料を弾完全塑性体と仮定して、塑性域全体に降伏応力 σ_Y が一樣に分布しているとす。さらに、き裂長さ $2(c+\omega)$ の仮想き裂を考え、塑性域の部分のき裂内面に σ_Y がき裂面間の結合力として作用したときの応力拡大係数と外力による応力拡大係数の和を0と置くことにより、塑性域寸法 ω を決定することができる。このモデルをDugdaleモデルと呼ぶ。Dugdaleは、一個のき裂を有する無限板の引張りについてこのモデルを提案した。しかし、緒言でも述べたように、このモデルの概念は一般的なき裂の問題に対しても原理的に通用する。

図1に示す半径 a の円孔縁から発生した長さ c のき裂を例にして、Dugdaleモデルによる塑性域寸法の計算の原理を説明する。重ね合わせの原理より、遠方応力 $\sigma_{y\infty}$ が作用する無限板中の円孔縁き裂(図1a)は、 $\sigma_{y\infty}$ が作用してき裂想定上に応力分布 σ_{yy} が発生する無き裂材(図1b)と、き裂長さ $(c+\omega)$ の仮想き裂の内面に(b)の応力分布 σ_{yy} が作用する固体(図1c)と、仮想き裂の内面に結合力 σ_Y が負圧として作用する固体(図1d)の重ね合

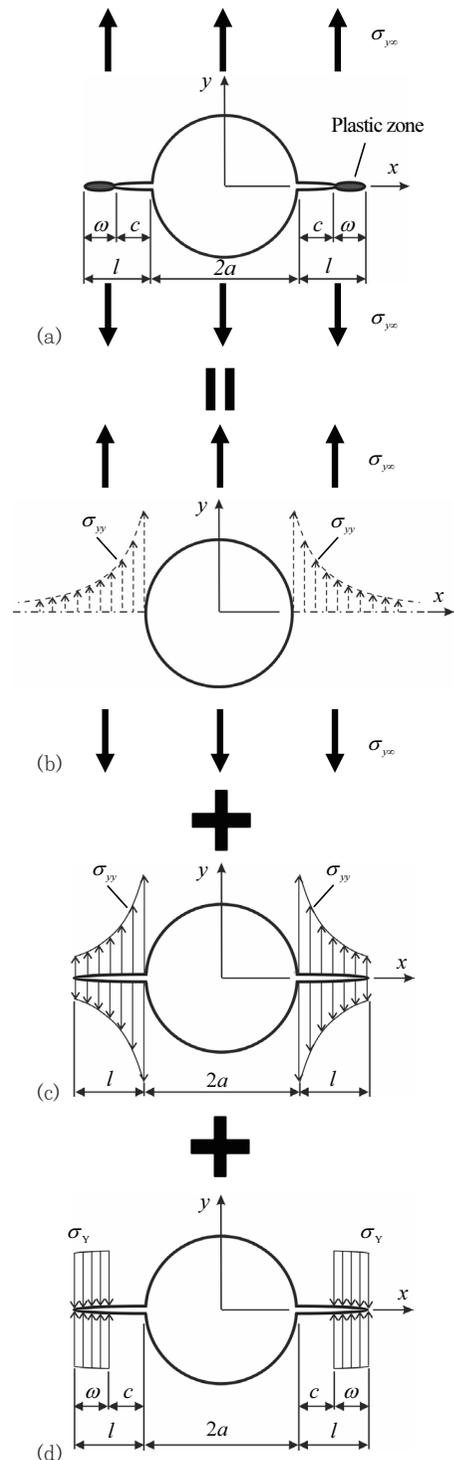


図1 円孔縁き裂におけるDugdaleモデルの重ね合わせの原理

わせで表現できる。仮想き裂先端で応力は有限なので、(b)と(c)と(d)におけるき裂の応力拡大係数を重ね合わせたときに、応力拡大係数は0とならなければならない。ただし、(b)の応力拡大係数は、き裂が存在しないので0であるから、満たすべき条件は次式となる。

$$K_A + K_B = 0 \quad (1)$$

ここで、 K_A は応力分布 σ_{yy} による応力拡大係数(図1c)、 K_B は結合力 σ_y による応力拡大係数(図1d)である。式(1)を満足する ω の値を解くことで、塑性域寸法 ω を決定することができる。また、楕円孔縁き裂やその他の任意形状の応力集中部から発生したき裂についても、上記の議論が同様に当てはまる。しかし、一般にこれらの K_A と K_B の解は閉じた式で与えられていないので、 ω の値を求めることは容易ではない。本研究では、円孔縁き裂を K_A と K_B が閉じた式で与えられている半無限板縁き裂へと近似して、 ω の値を求める一般的方法を提案する。

2.2 半無限板縁き裂への近似

図1(b)の x 軸上の応力分布 σ_{yy} は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y\infty} \left[1 + \frac{a^2}{2(a+x)^2} + \frac{3a^4}{4(a+x)^4} \right] \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_{y\infty}$ は遠方応力、 a は円孔半径、 x は円孔縁からの距離である。

図1cの円孔縁き裂のき裂長さ c が円孔の半径 a に比べて十分小さい場合は、き裂内面に図1cの応力分布 σ_{yy} が作用している図2に示す半無限板縁き裂へ近似ができる。き裂面に任意の分布の圧力が作用する場合の応力拡大係数を計算するための基本式には、図3に示すような半無限板縁き裂の内面に双集中荷重が作用する場合の応力拡大係数を与える次の実用式⁽⁷⁾を用いる。

$$K = \frac{2P\sqrt{\pi l}}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \{1 + f(\chi)\} \quad (3)$$

$$\chi = x/l$$

$$f(\chi) = (1 - \chi^2)(0.2945 - 0.3912\chi^2 + 0.7685\chi^4 - 0.9942\chi^6 + 0.5094\chi^8)$$

ここで、 x は半無限板縁からの距離、 P は集中荷重である。図2の応力拡大係数 K_A の値は次式で決定できる。

$$K_A = \int_0^l \left[\frac{2\sigma_{yy}\sqrt{\pi l}}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \{1 + f(\chi)\} \right] dx \quad (4)$$

また、図1dの結合力が作用するき裂に対して塑性域の範囲($c \leq x \leq l$)で式(3)を積分すれば、 K_B は次式で与えられる。

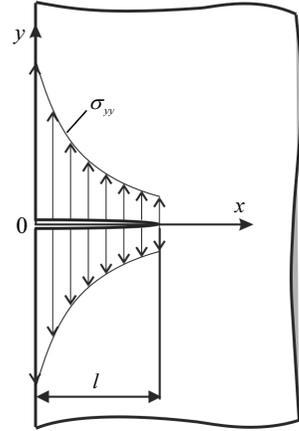


図2 図1cの応力分布を内面に受ける半無限板縁き裂

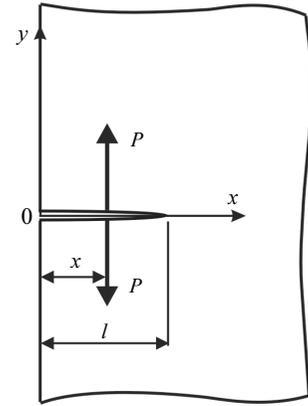


図3 内面に双集中荷重を受ける半無限板縁き裂

$$K_B = - \int_c^l \left[\frac{2\sigma_y\sqrt{\pi l}}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}} \{1 + f(\chi)\} \right] dx \quad (5)$$

式(4)と式(5)で応力拡大係数を数値計算して、式(1)を満足する ω を求める。図4の円孔縁き裂については、次式の円孔を有する無限板の x 軸上の応力分布⁽⁸⁾を式(4)の σ_{yy} に代入すれば、同様にして ω を決定することができる。

$$\sigma_{yy} = \sigma_{y\infty} \left[\frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right) - F_1(\zeta) - F_2(\zeta) \right]$$

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} - \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \right) \zeta^2 - \frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)^2} \right\}$$

$$F_2(\zeta) = \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{1}{\lambda + 1} \zeta^2 - \frac{1}{\lambda - 1} \right) \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \zeta = \frac{x + \sqrt{x^2 - \xi^2}}{\xi}, \quad \xi = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (6)$$

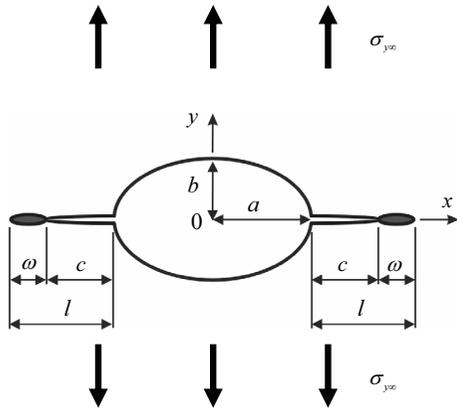


図4 無限板中の楕円孔縁き裂とき裂先端の塑性域

ここで、 a と b はそれぞれだ円の長径と短径、 x はだ円孔縁からの距離である。

3. 解析結果と考察

3.1 円孔縁き裂先端の塑性域寸法

遠方で一様引張りを受ける円孔縁き裂の塑性域寸法の解析結果を図5に示す。図中のプロット点は、Richら⁽⁴⁾による応力関数と等角写像法を用いた精度の高い解析結果を示している。本研究で得られた塑性域寸法はRichらの解析結果よりも若干大きめに計算されており、半無限板への近似を行ったことによる誤差が生じていると考えられる。しかし、塑性域寸法の傾向はRichらによるものとよく一致しており、本研究で提案した解析方法は実用性を考えれば有効な方法と言える。

c/a が十分小さいときのみ、2.2節のような半無限板への近似が成り立つ。しかし実際には、 $c/a=10$ のような c/a が十分小さいと言えないような場合についても、同様の近似をした解析結果は良好な結果を示した。この理由としては、半無限板へ近似したことによる K_A と K_B の誤差が異符号で生じ、式(1)を計算するときに相殺されることが考えられる。

3.2 だ円孔先端の塑性域寸法

円孔と $a/b=0.5$ のだ円孔が遠方で一様引張りを受ける場合のき裂長さ c を0として計算した塑性域寸法を図6に示す。これはき裂が存在しない場合を計算しているので、だ円孔の応力集中によって発生する塑性域を計算していることに相当する。図中の実線は本研究の解析結果で、点線は西谷ら⁽⁹⁾による体積法を用いた高精度な解析結果を示している。西谷らの結果は無限板中の円とだ円孔の解析結果である。彼らの結果と本解析結果は概ね一致しており、半無限板への近似を行ったことによる誤差は小さい。

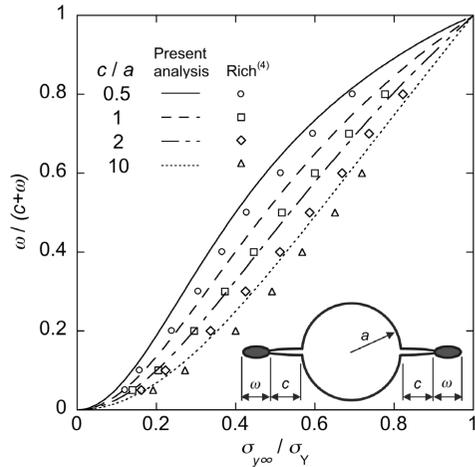


図5 円孔縁き裂先端の塑性域寸法

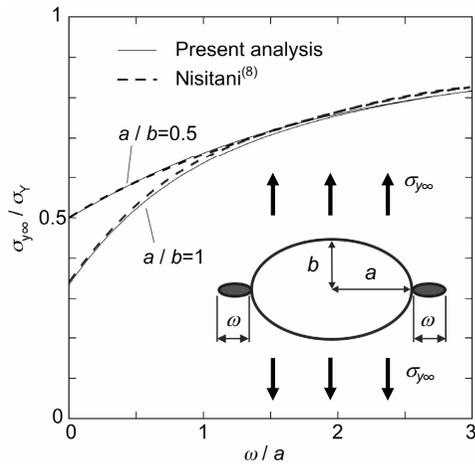


図6 円孔縁とだ円孔縁の塑性域寸法

3.3 だ円孔縁き裂先端の塑性域寸法

だ円孔縁き裂の塑性域寸法の解析結果を図7に示す。だ円孔のアスペクト比 $a/b=0.01\sim 100$ 、き裂長さ $c/a=0.01\sim 100$ の範囲で解析を行った。

だ円の応力集中係数を K_1 とすると、実際のだ円孔縁き裂は、 $c/a\rightarrow 0$ の極限では、 $K_1\sigma_{y\infty}$ が遠方で一様に作用する半無限板縁き裂に等価である。一方、 $c/a\rightarrow\infty$ の極限では、 $\sigma_{y\infty}$ が遠方で一様に作用する無限板中のき裂に等価となるべきものである。しかし、本研究の場合、無限板の問題を半無限板の問題に置き換える近似を行ったので、 $c/a=0$ では、上記と同じく $K_1\sigma_{y\infty}$ が遠方で一様に作用する半無限板縁き裂の塑性域寸法に収束するが、 $c/a\rightarrow\infty$ では、 $\sigma_{y\infty}$ が遠方で一様に作用する半無限板縁

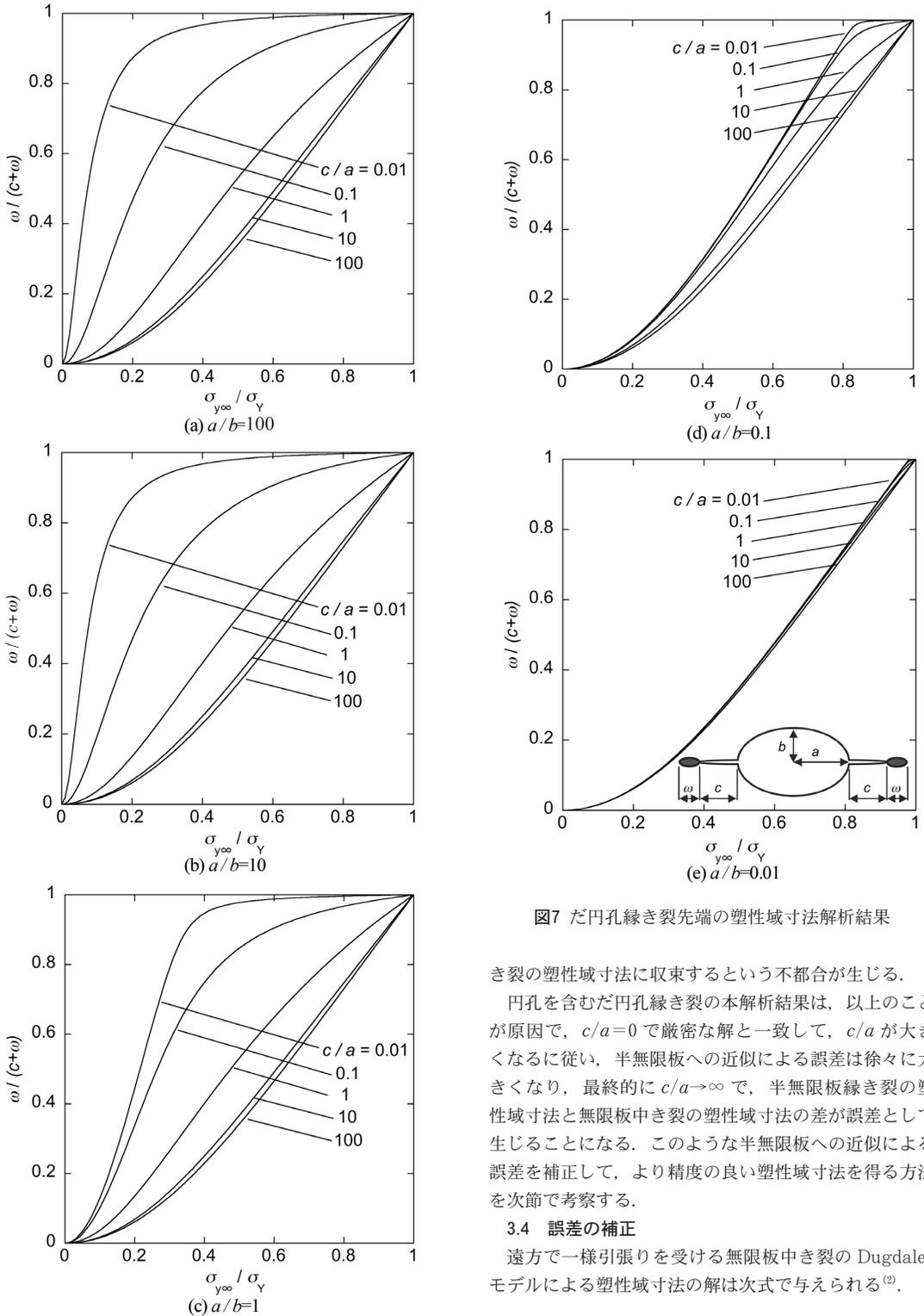


図7 だ円孔縁き裂先端の塑性域寸法解析結果

き裂の塑性域寸法に収束するという不都合が生じる。

円孔を含むだ円孔縁き裂の本解析結果は、以上のことが原因で、 $c/a=0$ で厳密な解と一致して、 c/a が大きくなるに従い、半無限板への近似による誤差は徐々に大きくなり、最終的に $c/a \rightarrow \infty$ で、半無限板縁き裂の塑性域寸法と無限板中き裂の塑性域寸法の差が誤差として生じることになる。このような半無限板への近似による誤差を補正して、より精度の良い塑性域寸法を得る方法を次節で考察する。

3.4 誤差の補正

遠方で一様引張りを受ける無限板中き裂のDugdaleモデルによる塑性域寸法の解は次式で与えられる⁽²⁾。

$$\omega = c \left\{ \sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{y\infty}}{\sigma_Y} \right) - 1 \right\} \quad (7)$$

半無限板縁き裂の塑性域寸法については、次式に示すような精度の良い近似解⁽³⁾が得られている。

$$\omega = 1.1215^2 c \left\{ \sec \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{y\infty}}{\sigma_Y} \right) - 1 \right\} \quad (8)$$

本解析結果は $c/a \rightarrow \infty$ で式(8)に一致する。しかし、実際のだ円孔縁き裂は $c/a \rightarrow \infty$ で式(7)に一致するべきである。そこで、 $c/a \rightarrow \infty$ では、本解析結果の塑性域寸法 ω を $\omega/1.1215^2$ と補正すれば、実際のだ円孔縁き裂の塑性域寸法と一致する。また、 $c/a=0$ では、本解析結果の ω は実際の楕円孔縁き裂の塑性域寸法と一致するので補正する必要はない。すなわち、解析結果 ω に対して c/a が大きくなるに従い、 ω から $\omega/1.1215^2$ へ変化させて補正すればよい。そこで補正式として次の形を考える。

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega}{A} \quad (9)$$

ここで、 ω_{mod} は ω の補正值、 A は ω の補正係数で c/a を変数とする関数である。

c/a が $0 \rightarrow \infty$ と変化するにつれて、 A が $1 \rightarrow 1.1215^2$ へと徐々に変化するように補正係数 A を次式で与える。

$$A = \frac{2}{\pi} (1.1215^2 - 1) \arctan \left(B \frac{c}{a} \right) + 1 \quad (10)$$

ここで、 B は補正に最適な定数である。図8に A の関数を示す。図のように、 B の値により A が 1.1215^2 に近づく速さが変わる。 B の値は補正後の塑性域寸法の誤差が、全体で最小となるように決定した。補正した塑性域寸法と Rich らの値との比較を図9に示す。円孔の場合は $B=4$ となる。一般のだ円孔についても有限要素法などで B の値を決定するのに必要な数だけ塑性域寸法を計算すれば、同様の手順で、精度の高い塑性域寸法を得ることができる。

本研究では、円孔とだ円孔のみについて塑性域寸法を計算して、計算法の有効性を検討した。しかし原理的には、それ以外の応力集中部から進展するき裂についても、き裂がない応力集中部について計算した応力分布 σ_{yy} を式(4)に代入することで、応力集中部先端に発生するき裂の塑性域を計算することが可能である。

4. き裂進展モデルへの応用

4.1 McEvily モデル

本研究で得られた円孔縁き裂の塑性域寸法を、き裂進展モデルの1つである McEvily モデル⁽⁶⁾に適用して、

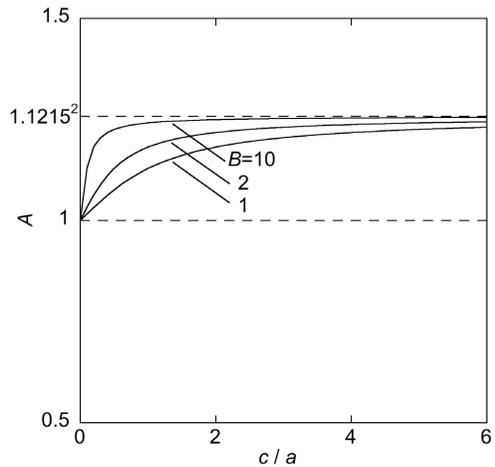


図8 補正係数 A との B 関係

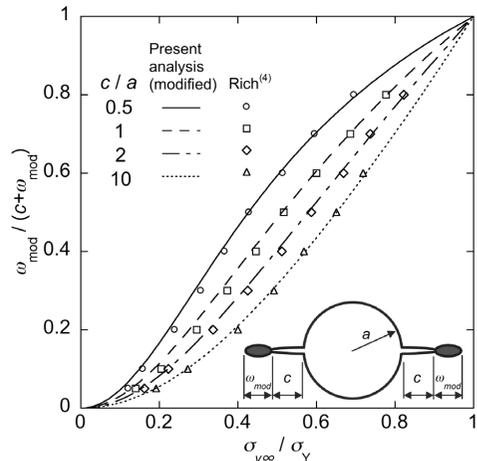


図9 補正した円孔縁のき裂先端の塑性域寸法

円孔を有する板の疲労限度と停滞き裂寸法を解析した。また、その結果を El Haddad ら⁽¹⁰⁾の円孔を有する平板の実験データと比較した。

McEvily ら⁽⁶⁾は疲労き裂の進展量 dc/dN を次式で提案した。

$$\frac{dc}{dN} = A (\Delta K_{\text{eff}} - \Delta K_{\text{effth}})^2 \quad (11)$$

ここで、 A は材料と環境に依存する定数、 ΔK_{eff} は有効応力拡大係数幅、 ΔK_{effth} は下限界有効応力拡大係数幅と呼ばれる材料定数である。応力拡大係数幅を ΔK とし、き裂開口時の応力拡大係数幅を ΔK_{op} とすれば、 ΔK_{eff} は次式に書き直すことができる。

$$\Delta K_{\text{eff}} = \Delta K - \Delta K_{\text{op}} \quad (12)$$

従って、式(11)は次式で表すことができる。

$$\frac{dc}{dN} = A [\Delta K - (\Delta K_{op} + \Delta K_{effth})]^2 \quad (13)$$

式中の ΔK はき裂進展の駆動力、 $\Delta K_{op} + \Delta K_{effth}$ はき裂進展の抵抗力ということができる。

式(11)または(13)は、長いき裂から短いき裂までを対象に考えられたものである。具体的に微小疲労き裂進展挙動の解析を行うにあたっては、次の3つの要因について考えなければならない。

- ・ き裂の弾塑性挙動
- ・ Kitagawa 効果
- ・ き裂閉口の発達

McEvily ら⁽⁵⁾は、上記の3つの要因を考慮して線形破壊力学に基づく解析を行うために、次のように修正を行った。

(1) 弾塑性挙動

緒言でも述べたように、応力集中部から進展するき裂は一般に弾塑性的に挙動するので、き裂開口量は応力拡大係数 K のみを考慮した場合より大きくなる。すなわち、式(13)のき裂進展の駆動力 ΔK は弾塑性を考慮して修正する必要がある。

Irwin⁽¹⁾は修正き裂長さ c_{mod} を導入することにより、線形弾性破壊力学を弾塑性問題へ拡張できることを示した。 c_{mod} は実際のき裂長さ c にき裂先端の塑性域寸法の1/2を足した長さである。すなわち修正長さ c_{mod} は次式のように計算される。

$$c_{mod} = c + \frac{1}{2}\omega = cF \quad (14)$$

ここで、 $F = 1 + \omega/(2c)$ である。 $\sigma_{yoc} \ll \sigma_Y$ の場合、 ω は c に比べ小さいのでき裂長さ c の修正は小さい。しかし σ_{yoc} が σ_Y に近くなるにつれて ω は大きくなるので、き裂長さ c は実際の長さよりも大きく修正される。

(2) Kitagawa 効果

Irwin⁽¹⁾はモード I の応力拡大係数 K_I と応力集中係数 K_t は次式で表されるような関係があることを示した。

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} K_t \sigma \sqrt{\frac{\pi\rho}{4}} \quad (15)$$

ここで、 ρ は応力集中部の曲率半径、 σ は遠方で作用する応力である。長い疲労き裂の下限界値と平滑材疲労限度の関係の遷移域(北川効果⁽¹²⁾)を考慮するために、McEvily ら⁽⁵⁾はき裂先端の曲率半径は0ではなく、ある大きさ ρ_e をもつと仮定して、式(15)を次式のように修正した。

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow \rho_e} K_t \sigma_{yoc} \sqrt{\frac{\pi\rho}{4}} \quad (16)$$

ここで、 ρ_e は疲労き裂を鋭い切欠きとみなしたときの実効的な切欠き半径であり材料定数である。モード I 荷

重の下で、板の中心に引張方向に垂直にき裂状の鋭いだ円孔が存在する場合の応力集中係数は、 $K_I = (1 + 2\sqrt{a/\rho})$ で与えられるので、式(16)は次のようになる。

$$K_I = \left(\sqrt{\frac{\pi\rho_e}{4}} + \sqrt{\pi a} \right) \sigma_{yoc} \quad (17)$$

パラメータ ρ_e は、応力拡大係数の関係から等価長さ r_e に置換することができる。すなわち、式(16)の $K_I \sigma_{yoc}$ に σ_{max} を代入して定義される応力拡大係数 $K_I = \sigma_{max} \sqrt{\pi\rho_e/4}$ が、き裂先端からの距離 r_e の x 軸上 y 方向の応力 σ_{yy} が σ_{max} となる応力拡大係数 $K_I = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r_e}$ に等しいとすると、次の関係が得られる。

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{\pi\rho_e}{4}} = \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r_e} \quad (18)$$

この関係から $r_e = \rho_e/8$ が得られる。 r_e は材料中に潜在的に存在する欠陥のようなものと考えられることができるが、実際に観察される欠陥と関係があるわけではなく、むしろ修正のために導入された仮想的き裂長さにとらえた方がよい。この仮想長さはき裂長さ a が十分小さいときのみ意味を持ち、応力拡大係数の値を修正するようにはたらく。式(17)で $\rho_e = 8r_e$ とおくと、応力拡大係数 K_I は次のように表される。

$$K_I = (\sqrt{2\pi r_e F} + \sqrt{\pi c F}) \sigma_{yoc} \quad (19)$$

繰返し荷重の下で弾塑性の影響を説明する修正応力拡大係数幅 ΔK_{mod} は、式(14)から次式のように表される。

$$\Delta K_{mod} = (\sqrt{2\pi r_e F} + Y\sqrt{\pi c F}) \Delta\sigma_{yoc} \quad (20)$$

ここで、 Y は応力拡大係数の補正係数である。式(20)において、 c を r_e 、 ΔK_{mod} を ΔK_{effth} と等しいとして、 $\Delta\sigma_{yoc}$ を平滑材の疲労限度の応力幅 $\Delta\sigma_{n0}$ とおくことで、 r_e を解くことができる。 r_e の値は通常 $1\mu\text{m}$ のオーダーである。

き裂の問題を扱うときには、圧縮応力の下ではき裂は閉口するので、応力比 $R = -1$ の場合は $\Delta\sigma_{yoc}$ は応力振幅 σ_{yoc} に等しい。

(3) き裂閉口の発達

疲労き裂の先端は、通常引張り荷重が負荷されてもある荷重まで閉口せず、また荷重が0になる前に閉口する。この現象はき裂閉口と呼ばれる。

McEvily ら⁽⁵⁾はき裂の先端に新しいき裂が形成されるに従って、き裂閉口が発達する現象を定量的に扱うために次式を用いた。

$$K_{op} = (1 - e^{-k\lambda}) K_{opmax} \quad (21)$$

ここで、 K_{opmax} はき裂閉口の発達完了した巨視的き裂

に対するき裂開口時の応力拡大係数値であり材料定数である。 k はき裂進展量 λ の増加に対して増大するき裂閉口の発達速度を表しており材料定数である。 また、 λ はき裂長さ c_0 の初期き裂から新しく形成されたき裂の長さで、き裂長さ c を用いて $\lambda = c - c_0$ と表せる。

(4) き裂進展の構成式

以上の(1)~(3)の3つの修正を考慮して、最終的に式(11)は次のように表される。

$$\frac{dc}{dN} = AM^2 \tag{22}$$

ここで、 M は次式で表される。

$$M = \left[\sqrt{2\pi r_c F} + Y\sqrt{\pi c F} \right] \sigma_{y\infty} - (1 - e^{-k\lambda}) K_{opmax} - \Delta K_{effth} \tag{23}$$

4.2 円孔縁き裂の進展挙動解析

無限板中の円孔縁から遠方応力に対し垂直方向に発生・進展する平板中の円孔縁き裂の挙動について、上記のMcEvilyモデルを用いて解析を行った。本研究では、平板を無限板と見なせるほど、円孔とき裂は平板に対して十分小さく、平板の厚みは十分小さいとして、2次元き裂での解析を行った。

式(22)、(23)を用いて、円孔縁き裂について解析するには、円孔縁き裂における応力拡大係数の補正係数 Y とき裂先端の塑性域寸法 ω が必要となる。 ω は本解析の手法により計算された ω_{mod} を用いた。円孔縁き裂における補正係数 Y はき裂長さと円孔半径の比によって値が決定される。この比を $c_1 = c/(a+c)$ として表せば、 Y と c_1 の関係は図10のようになる⁽¹³⁾。

次式で表されるように式(23)の M が0になれば $dc/dN = 0$ が満たされる。

$$\left[\sqrt{2\pi r_c F} + Y\sqrt{\pi c F} \right] \sigma_{y\infty} - (1 - e^{-k\lambda}) K_{opmax} - \Delta K_{effth} = 0 \tag{24}$$

初期き裂長さ $c = r_c$ から計算を開始して c を変えながらき裂進展の限界応力 $\Delta\sigma_{th}$ を求めれば、 $\Delta\sigma_{th}$ を c の関数として得ることができる。

遠方応力に対し垂直方向に発生・進展した円孔縁き裂の $\Delta\sigma_{th}$ と c の関係の解析結果と El Haddad ら⁽¹⁰⁾ の実験結果の比較を図11に示す。本解析に用いた材料定数を表1に示す。実験データは円孔縁から発生・進展したき裂なので、初期き裂長さは r_c とした。表1の値から $r_c = 4.8 \mu m$ が計算される。図中の曲線はき裂進展の限界応力なので、曲線の上側の応力ではき裂は進展して、下側の応力ではき裂は停留することを意味する。一定振幅かつ進展限界応力以上の応力でき裂が進展する場合、もし $\Delta\sigma_{th}$ の曲線と交差すれば、き裂は進展を停止して停留き裂となる。したがって、曲線の極大値(図中の点A、

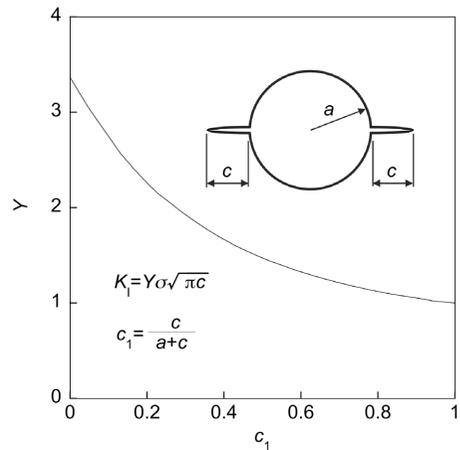


図10 円孔縁き裂の応力拡大係数の補正係数 Y

表1 解析に用いた材料定数

K_{opmax} [MPam ^{1/2}]	ΔK_{effth} [MPam ^{1/2}]	σ_Y [MPa]
5.5	3.0	376
σ_B [MPa]	σ_{w0} [MPa]	k [m ⁻¹]
676	276	6000

B、C)が、破断・非破断の限界値、すなわち疲労限度である。図中には、円孔の応力集中による影響を無視して F の値を計算した解析結果も点線で示す。本解析との違いは円孔の近傍で大きくなる。点線の場合は、 $c = r_c$ でき裂進展を開始する最低応力がその後の $\Delta\sigma_{th}$ の極大値よりも大きくなり、疲労き裂の停留現象を説明できない。これに対して、本解析結果は円孔半径が小さい場合にはき裂進展限界の最低応力 ($c = r_c$) が σ_{th} の極大値より小

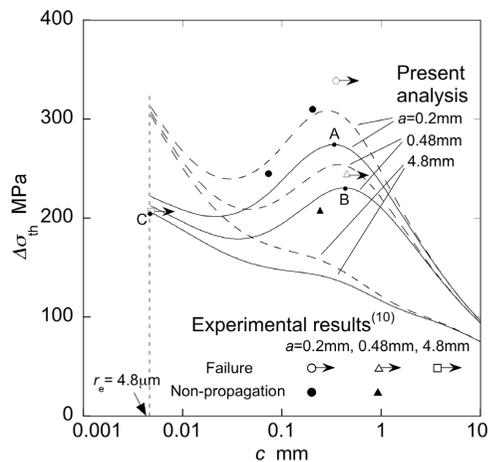


図11 き裂長さとき裂進展限界応力の関係

いので、いったん進展を開始したき裂が、成長した後に進展を停止する停留現象がうまく説明できる。 $a=4.8$ mm の場合は $\Delta\sigma_{th}$ と c の関係は単調減少となっており、大きい半径の円孔ではいったん発生したき裂は停留しないという現象も本解析によりよく説明できる。 El Haddad らは G40.11 鋼の平板に円孔を導入して引張圧縮 ($R=-1$) 疲労試験を行った。円孔は半径が $a=0.2, 0.48, 4.8$ mm の 3 種類について、試験応力を考えて停留き裂の長さを測定した。図 11 の中空の記号はき裂が停留せずに進展し続けたことを示し、中実の記号はプロット点の位置の長さでき裂が停留したことを示している。 $a=0.48$ mm の場合では、解析結果と実験結果は良く一致している。 $a=0.20$ mm の場合では、解析結果が過小評価となっている。 $a=4.8$ mm では停留き裂が存在しなかったが、これも本解析の結果に一致している。

5. 結 言

無限板中の円孔縁およびだ円孔縁のき裂先端の塑性域寸法を Dugdale モデルに基づいて計算するために、無限板中の円孔およびだ円孔縁き裂を半無限板の縁き裂へ近似して、塑性域寸法を計算する方法を提案した。

本研究で得られた円孔縁き裂の塑性域寸法を McEvily モデルに適用して、El Haddad らの行った円孔を有する鉄鋼板の疲労試験結果と比較した。本解析結果によって、小さな円孔から発生・進展したき裂が、疲労限度より若干小さな応力では停留き裂になる現象をよく説明できた。

参 考 文 献

- (1) G.R. Irwin: Naval Research Laboratory Report No.5486, Naval Research Laboratory, Washington, DC, 1960.
- (2) D.S Dugdale.: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, *J. Mech. Phys. Solids*, **8**, 1960, 100-104.
- (3) H. Nisitani and Y. Murakami: Interaction of Elasto-Plastic cracks Subjected to a Uniform Tensile Stress in an Infinite or a Semi-Infinite Plate, *Proc. of Int. Conf. Mech. Behav. of Mater.*, **1**, 1972, 346-356
- (4) T. Rich and R. Roberts: Plastic Enclave Sizes for Internal Cracks Emanating from Circular Cavities within Elastic Plates, *Eng Fract. Mech*, **1**, 1968, 167-173.
- (5) A.J. McEvily, D. Eifler and E. Macherauch: An Analysis of the Growth of Short Fatigue Cracks, *Eng. Fract. Mech.* **40**, 1991, 571-584.
- (6) S.P. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill International, 1982, p.90.
- (7) R.J. Hartranft and G.C. Sih: Alternating Method Applied to Edge and Surface Crack Problems, *Mech. of Fract.* **1**, 1973, p.197.
- (8) 村上敬宜: 弾性力学, 養賢堂, 2004, p.56.
- (9) H. Nisitani: *International Congress on Fracture*, Munich, 1973, I-513.
- (10) M.H. El Haddad, T.H. Topper and K.N. Smith: Prediction of Non Propagating Cracks, *Eng Fract. Mech.* **11**, 1979, 573-584.
- (11) G.R. Irwin: First Symposium on Naval Structure and Mechanics, Pergamon Press, 1960, 557-594.
- (12) 北川英夫・高橋進: 微小な疲労き裂の成長とその下限条件に関する破壊力学的研究, 機械学会論文集 A, **45**-399, 1979, 1289-1303.
- (13) Y. Murakami et al.: Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Oxford, 1987.