

Lamellar grating 型 3次元周期構造光導波路(突起型)の数値解析*

宮 本 徳 夫**
 百 田 美 智 子**
 安 元 清 俊***

Numerical Analysis of Raised Lamellar Grating Type Three-Dimensional Optical Waveguide with Periodic Structure

Tokuo MIYAMOTO, Michiko MOMODA and Kiyotoshi YASUMOTO

Three-dimensional optical waveguide with periodic structure is playing an important role in optical IC, and more accurate analysis on such waveguides with arbitrary number of periods is required. In this paper, revised Fourier series expansion method for larger number of periods and higher accuracy in which Floquet's theorem is introduced is applied to numerical analysis of raised lamellar grating type periodic optical waveguides with rectangular cross-section (glass and semiconductor substrates). Referring to the numerical results, the characteristics for reflected and transmitted powers of guided and radiation fields vs. wavelength are investigated for various depths of the grating groove and for each number of periods. Then the effects of the groove depth and the number of period on the powers of each mode are made clear the behavior of the radiation field in the shorter wavelength is also investigated, and the appropriate parameters preferred for the reflected dominant guided mode propagation in the periodic waveguide concerned are exemplified.

Key Words: Numerical Analysis, Three-Dimensional Periodic Waveguide, Lamellar Grating Type

1. まえがき

周期構造をした各種の3次元薄膜光導波路は、光 IC デバイスの素子として重要な役割が期待されている。これらの素子の詳しい解析は必ずしも容易ではない。これまで、2次元の場合について多くの解析が行われてきたが、最近になり3次元周期構造光導波路の解析が注目されている。それらの多くは、FDTD法やBPM法と他の算法を組み合わせ、反射波を考慮した算法等が多く試みられている^{(1)~(4)}。

一方、筆者等は、反射波及び放射波も同時に計算できる算法として断面内に仮想周期を導入したフーリエ級数展開法により、3次元の各種誘電体導波路のより詳しいフルベクトル解析を試みてきた^{(6)~(11)}。また、周期構造導波路に対して、エバネッセント波の発生による計算上の障害を除去し、周期数に関係しない、より高精度の数値解析が行えるように改善を加えて^{(12), (13)}、ファイバグレーティング、各種の埋込型や突起型の屈折率変調型方形断面3次元周期構造光導波路における導波及び離散化された放射各モードの反射、透過各電力の波長特性のより詳しい解明を行ってきた^{(14)~(22)}。

一方、周期構造導波路としては、DFB半導体レーザ等に見られるように、lamellar grating型の3次元周期構造光導波路(図1)の例も多い。この型のグレーティ

* 平成17年5月31日受付

** 電子情報工学科

*** 九州大学大学院システム情報科学研究科

ングに関する解析は、主に2次元(スラブ型)問題として古くから回折、散乱、導波問題として試みられている。近年、マイクロ波による実験を伴って、スラブ導波路の伝搬特性の近似解析が放射波が十分小さい場合について行われている⁽²³⁾。3次元導波路としては、埋込型チャンネル導波路の放射波に着目して、FEM、BEMを併用した摂動法による解析例がある⁽²⁴⁾。導波モードに関しては、高周期に対して、Floquetの定理を考慮したMoL-BPM法による2次元の場合の詳しい解析が行われている⁽⁵⁾。

そこで、本論文では、改善された前述のフーリエ級数展開法^{(20), (21)}を適用して、図1に示す方形断面のガラス基板及び半導体基板のlamellar grating型3次元周期構造光導波路(突起型)における反射基本導波モードを中心として詳しい解析を試みる^{(25), (26)}。数値例としては、グレーティングの深さ、周期数等を変えた場合の導波モード及び放射波についても、その反射及び透過各電力の波長特性を求め、それらの特性や短波長側で問題となっている放射波の増大についての解明を行うと共に、安定なグレーティング導波路を得るための設計の目安を与える。

2. 算法の理論背景

フーリエ級数展開法の詳しい算法については文献(8), (20)を参照されたい。ここでは、その算法の理論的背景について述べるに止める。

まず座標軸、電磁界を規格化して次のMaxwell方程式を考える。

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = -j\mathbf{H}(x, y, z), \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(x, y, z) = j\epsilon(x, y)\mathbf{E}(x, y, z) \tag{2}$$

ここで $\epsilon(x, y)$ は考えている領域の断面内の導波路を含む全ての媒質の比誘電率の分布を示す。各領域での電磁界を式(1), (2)を解いて求めるために、図1に示すように、導波路を含む断面内の x, y 方向に仮想周期列を導入し、その周期をそれぞれ Λ_x, Λ_y として、電磁界各成分を複素2重フーリエ級数展開によって次のように表す。

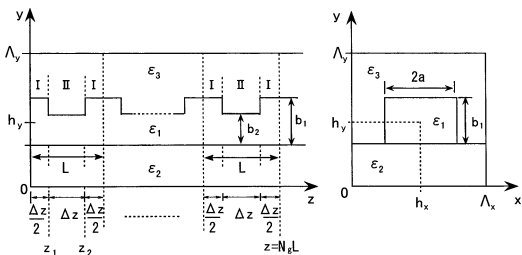


図1 Lamellar grating型周期構造光導波路(突起型)

$$E_i(x, y, z) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N e_{m,n}^i(z) \exp(-jsmx) \exp(-jtny),$$

$$H_i(x, y, z) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N h_{m,n}^i(z) \exp(-jsmx) \exp(-jtny),$$

$$i = x, y, z, \quad s = 2\pi/\Lambda_x, \quad t = 2\pi/\Lambda_y. \tag{3}$$

ここで電磁界のフーリエ係数 $\{e_{m,n}^i(z)\}$ 及び $\{h_{m,n}^i(z)\}$ ($i = x, y$)を、 $K = (2M+1)(2N+1)$ として、 $2K$ 次の列ベクトル $\mathbf{e}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^x \\ \mathbf{e}^y \end{bmatrix}$, $\mathbf{h}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^x \\ \mathbf{h}^y \end{bmatrix}$ で表す。さて、Maxwellの方程式(1), (2)に式(3)を代入すると、次の行列形式に整理された z に関する連立1階微分方程式が導かれる。

$$d\mathbf{e}(z)/dz = -j\mathbf{C}_1 \mathbf{h}(z), \tag{4}$$

$$d\mathbf{h}(z)/dz = -j\mathbf{C}_2 \mathbf{e}(z), \tag{5}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{MA}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{MA}^{-1}\mathbf{M} + \mathbf{I} \\ \mathbf{NA}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I} & -\mathbf{NA}^{-1}\mathbf{M} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{NM} & \mathbf{M}^2 - \mathbf{A} \\ -\mathbf{N}^2 + \mathbf{A} & \mathbf{NM} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

\mathbf{I} は K 次の単位行列であり、 \mathbf{M}, \mathbf{N} は次の K 次の対角行列で表される：

$$\mathbf{M} = [sm\delta_{mm}, \delta_{nn}], \quad \mathbf{N} = [tn\delta_{mm}, \delta_{mm}'] \tag{8}$$

但し、 $\delta_{mm'}$ 等はクロネッカーのデルタを示す。 \mathbf{A} は $\epsilon(x, y)$ のフーリエ係数に関する次の行列で表される：

$$\mathbf{A} = [\epsilon_{p,q}], \quad p = m - m', \quad q = n - n',$$

$$\epsilon_{p,q} = \frac{1}{\Lambda_x \Lambda_y} \int_0^{\Lambda_x} dx \int_0^{\Lambda_y} dy \epsilon(x, y) \exp(-jspx) \exp(-jtqy) \tag{9}$$

計算手数の節約のため、式(4), (5)に代って

$$d^2\mathbf{e}(z)/dz^2 = -\mathbf{C}\mathbf{e}(z), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 \tag{10}$$

を考える。式(10)は $2K$ 次の係数行列 \mathbf{C} の固有値問題に帰着され、標準的なサブルーチンにより、解は簡単に得られる。すなわち、 \mathbf{C} の固有値を κ_k^2 ($k = 1, 2, \dots, 2K$)とし、それに対応する固有ベクトル \mathbf{P}_k^e から成る $2K$ 次の正方行列を \mathbf{P}^e とすると、 \mathbf{P}^e は行列 \mathbf{C} の対角化行列である。ここで、無損失の導波路を考えているので κ_k^2 は実数である。(説明は付録Aに示す)。次に、 $2K$ 次のベクトル変数 $\mathbf{a}(z)$ を導入し、

$$\mathbf{e}(z) = \mathbf{P}^e \mathbf{a}(z), \quad \mathbf{a}(z) = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k \ \dots \ a_{2K}]^T \tag{11}$$

とすれば、式(10)は $\mathbf{a}(z)$ に関して解かれ、 $\mathbf{a}(z) = [\mathbf{a}^+(z) \ \mathbf{a}^-(z)]^T$ が得られる。但し、 $\mathbf{a}(z_0)^\pm$ は $z = z_0$ での $\mathbf{a}(z)$ の初期値であり、 $\pm z$ 方向への規格化伝搬定数が $\pm\kappa_k$ ($= \pm\beta_k/k_0$)である k 番目の固有モードの複素振幅を表す。固有値 κ_k は大きい順に導波モード、離散化

された放射モードと並べられているものとする。また、 κ_k が虚数の場合はエバネッセント波となり、その絶対値の小さい順に並べている。ここで進行波 $\exp(-j\kappa_k z)$ が減衰するように $\text{Im } \kappa_k < 0$ 及び $\text{Re } \kappa_k > 0$ を仮定する。従って、反射波 $\exp(j\kappa_k z)$ は虚数の κ_k に対しては増大するため、実際の伝送電力の計算においては、安定した収束解が得られるよう工夫している。具体的例については文献②の式(4)を参照されたい。なお、本算法ではフーリエ級数で電磁界を展開しているため、高精度の解を得るには展開項数 (M, N) を大きくする必要があるが、それを仮想周期 $\Lambda_x(\Lambda_y)$ に比べて一定の大きさ $(\sqrt{\epsilon_{\min}}/2(\Lambda/\lambda))$ より大きくすると κ_k が虚数となることに注意を要する(文献(8)の付録 D, 文献②の p.61, 62 参照)。ここで Λ' は仮想周期の実寸、 ϵ_{\min} は導波路構造の比誘電率分布の中での最小の値を示す。

以上、図 1 の各領域での固有値、固有ベクトル等の解より、Floquet の定理を適用して複素振幅ベクトル $\mathbf{a}^l(z)$ を求めると、各周期構造導波路での導波モード及び放射波の反射電力 R_g, R_r 及び全透過電力 T_g, T_r はそれぞれ

$$R_g = \sum_{k=1}^{K_1} |a_k^{l-}(0)|^2, \quad R_r = \sum_{k=K_1+1}^{2K} |a_k^{l-}(0)|^2, \\ T_g = \sum_{k=1}^{K_1} |a_k^{l+}(N_g L)|^2, \quad T_r = \sum_{k=K_1+1}^{2K} |a_k^{l+}(N_g L)|^2, \quad (12)$$

$$T_g + T_r + R_g + R_r = 1 \quad (13)$$

で表される(導出については文献②の p.23, 24 参照)。ここで、 K_1 は導波モードの個数である。また、各波長に対して k 番目モードの伝送電力が $|a_k|^2$ となるように固有ベクトルは規格化されている。

3. 数値結果

図 1 において、 $\sqrt{\epsilon_1}=1.55, \sqrt{\epsilon_2}=1.45, \sqrt{\epsilon_3}=1.0, a=b_1=1.5[\mu\text{m}]$ (ガラス基板) および $\sqrt{\epsilon_1}=3.5, \sqrt{\epsilon_2}=3.15, \sqrt{\epsilon_3}=1.0, 3.0, a=b_1=0.8[\mu\text{m}]$ (半導体基板)、 $\Lambda_x=\Lambda_y=\Lambda=10\lambda$ とした方形断面突起型 lamellar grating 型周期構造光導波路において、 $z=0$ からの E_x が主要界である基本モード (HE_{11}) 入射に対して、周期数 N_g およびグレーティングの溝の部分の厚さ b_2 (溝の深さ $\Delta b=(b_1-b_2)/b_1 \times 100$) を変えた時の基本導波モード (HE_{11}) の反射電力 R_{g1} 、透過電力 T_{g1} 及び離散化された放射波の全反射電力 R_r 、全透過電力 T_r (式(12))の波長特性に関する数値解析結果を図 3~9 に示す。なお、本論文の数値解析において、 $a, b_1, b_2, \Delta z, \Lambda$ の数値は実寸で表示している。

仮想周期 Λ は境界からの影響を考えると大きい方が望ましいが、その分一定の精度を保つために、式(3)中の

展開項数 $M(=N)$ を多くする必要がある。著者等の本算法によるファイバの数値計算例(付録 B)によって、 $\Lambda/2a$ が 4 以上であれば、基本モードの固有値が M を増すことで真値からのずれが 10^{-7} 程度となることが確認されている。したがって、本計算において $2a=3[\mu\text{m}]$ なので、 $\Lambda=10\lambda(\lambda \sim 1.5[\mu\text{m}])$ で特性の説明には充分と思われる。図 2 に本算法における展開項数 M を上げたときの基本導波モードの固有値 $\kappa_1^I, \kappa_1^{II}$ 、反射電力 R_{g1} の収束特性を示す。これによれば、埋込型光導波路におけるガラス基板の場合は、同図 (a)~(c) に示すように固有値 κ_1 については $\sqrt{\epsilon_2}=1.0$ の時で 4~5 桁の精度であり、 $\sqrt{\epsilon_2}$ を大きくすると収束が早くなることが分る。反射電力 R_{g1} については固有値よりも 2~3 桁悪くなる。本文の例は突起型 Lamellar grating 導波路についてであるが、精度において大きな差異はない。一方、図 2 (d), (e) に示すように、半導体基板になれば導波部の屈折率 $\sqrt{\epsilon_1}$ が 3.5 となり、 $\Delta n=\sqrt{\epsilon_1}-\sqrt{\epsilon_2}$ がかなり大きいため、一般に収束が悪くなる。本例の場合は κ_1 でも 3 桁と悪い。このため、反射電力 R_{g1} については図 2 (c) のガラスの場合より更に悪くなる。精度を上げるためには展開項数 $M(=N)$ の値も大きい方が望ましいが、本論文では、図 3~9 に示される各場合の計算例の特性の把握に着目しており、計算手数の節約のため $M=N=10$ に留めている。この値は図 2 に示すように収束値には達していないが、反射電力の収束特性によれば、各電力は $M=10$ でも有効数字 2~3 桁の精度が得られており、それぞれの特性の定性的説明には支障がないと考えられる。

図 3 には、 $b_2=1.2[\mu\text{m}]$ として、周期数 N_g を 100 から 1000 まで変えた時の各電力の波長特性を示す。高周期になるにつれ、 R_{g1} のピーク値 (R_{g1}^p) は大きくなり、波長特性はシャープになる。一方、放射電力の T_r は Bragg 波長からずれるにつれ、ほぼ対称的に変化していくが、 R_r は短波長側にずれるにつれ非対称的に大きくなり、主ローブの端部で最大値 R_r^p を示し、基本導波モードの電力の波長特性の非対称性の原因となっている^{(5), (22), (28)}。しかし、放射反射電力 R_r は波長が主ローブから短波長側にかなり離れても、 $N_g > 100$ の各周期数に対しては、屈折率変調型周期構造導波路^{(21), (22)}の場合と比べると、基本導波反射モードのサイドローブの変化に応じて周期的に波打ちはするが、それぞれの周期でのピーク値は前述の R_r^p の大きさの範囲でほぼ一定であることが確認されており、この種の導波路の特徴の一つといえよう(図 4 (a) 参照)。そこで、本計算例の波長範囲として、各場合の放射波のピーク値の大きさの目安を知るために、第 1 サイドローブの範囲に留め、その範囲で R_r の最大値を R_r^p として各図に記入している。 $b_2=1.2[\mu\text{m}]$ の場合の R_r^p/R_{g1}^p は $N_g \geq 200$ の各 N_g に対して $0.052 \sim 0.055$ 付

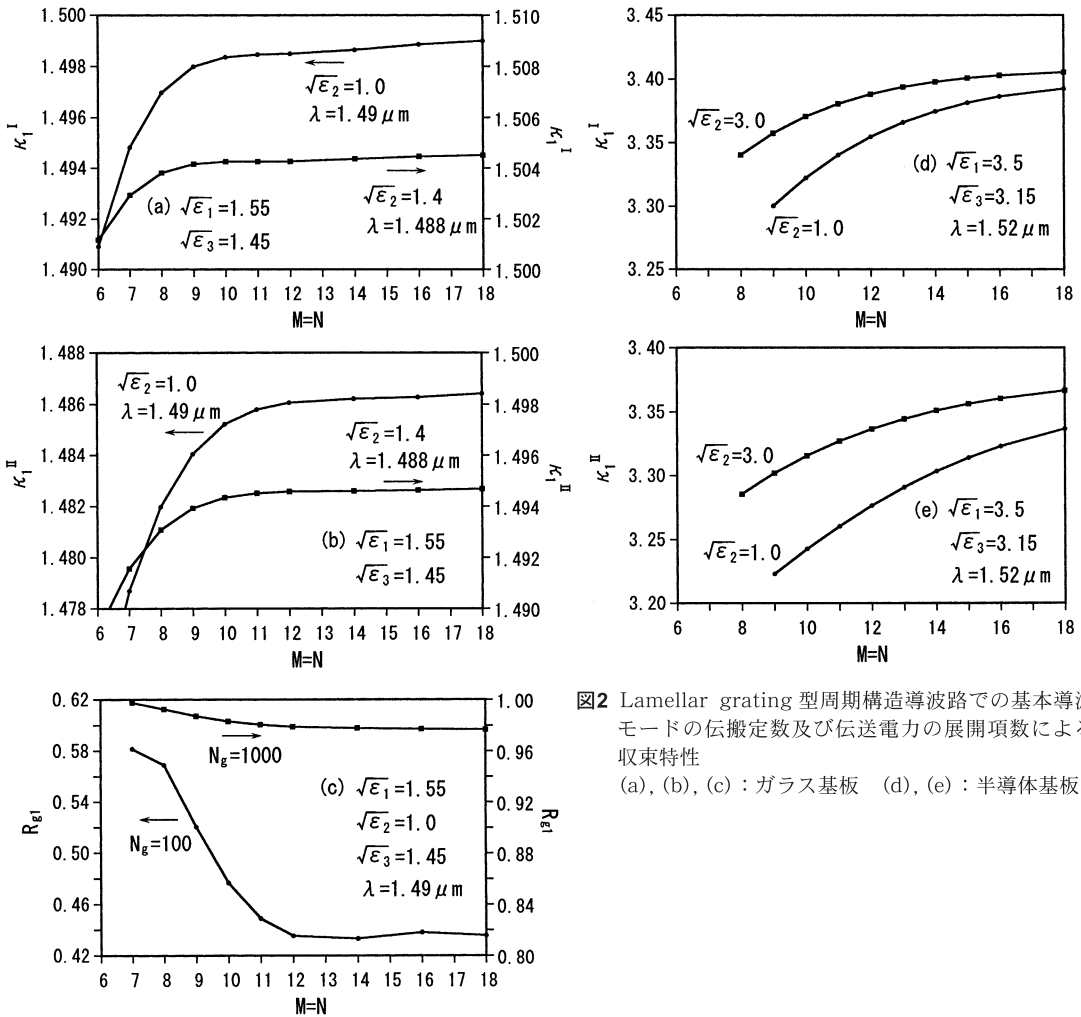


図2 Lamellar grating 型周期構造導波路での基本導波モードの伝搬定数及び伝送電力の展開項数による収束特性
(a), (b), (c) : ガラス基板 (d), (e) : 半導体基板

近で留まっていることが確認されている。なお、 N_g が大きくなると、 R_{g1} がピーク値となる波長は主ローブの右端に移動するが、Bragg 波長 λ_B はグレーティングの一周期内の各領域 I, II での等価屈折率と周期の長さによって決まるので、 N_g が多くなっても λ_B は一定であることに注意を要する。

図 4 (b) には、図 3 (b) で $\sqrt{\epsilon_3}$ を 1.45 として完全埋込型にした場合の同様な特性を示す。 R_{g1} のピーク値は下がるが、それ以上に放射電力が少なくなり、 R_r^p/R_{g1}^p は半減することが分る (この現象の詳細については後の半導体基板の所で説明する)。図 4 (c) には、入射波として EH_{11} モード (E_y 主要) を入射させたときの図 5 (d) と同じパラメータでの特性を示す。 HE_{11} 入射 (E_x 主要) (図 5 (d)) に比べて、 R_r^p/R_{g2}^p はほぼ同じ値であるが R_{g2} のピーク値は小さくなり、波長幅は狭まることが確認さ

れている。このことは EH_{11} モードが高次モードなので、同じ周期 L に対しては反射導波モードの Bragg 周波数が高くなり、その界分布は図 4 (d) に示すように、導波路中央部 (基板部) にシフトするため、周期構造導波路の摂動部 (凹凸部) での反射導波基本モードの電界強度分布が小さくなるため、グレーティング構造の -1 次空間高調波との結合が弱くなり、結果として R_{g1} のピーク値が小さくなると考えられる⁽²⁷⁾。

図 5 (a) ~ (d) に示すように、一定の N_g (=200) に対し、 b_2 が小さくなる (溝の深さ Δb が深くなる) とグレーティング効果が大きくなるため、 R_{g1} のピーク値 (R_{g1}^p) は大きく、ローブの波長幅は広がるが、一方、全放射波の電力 R_r, T_r のピーク値は更に大きくなっている。しかしながら、離散化された各次の放射モードの反射電力の大きさは、例えば $b_2 = 1.2 [\mu m]$ の場合には、

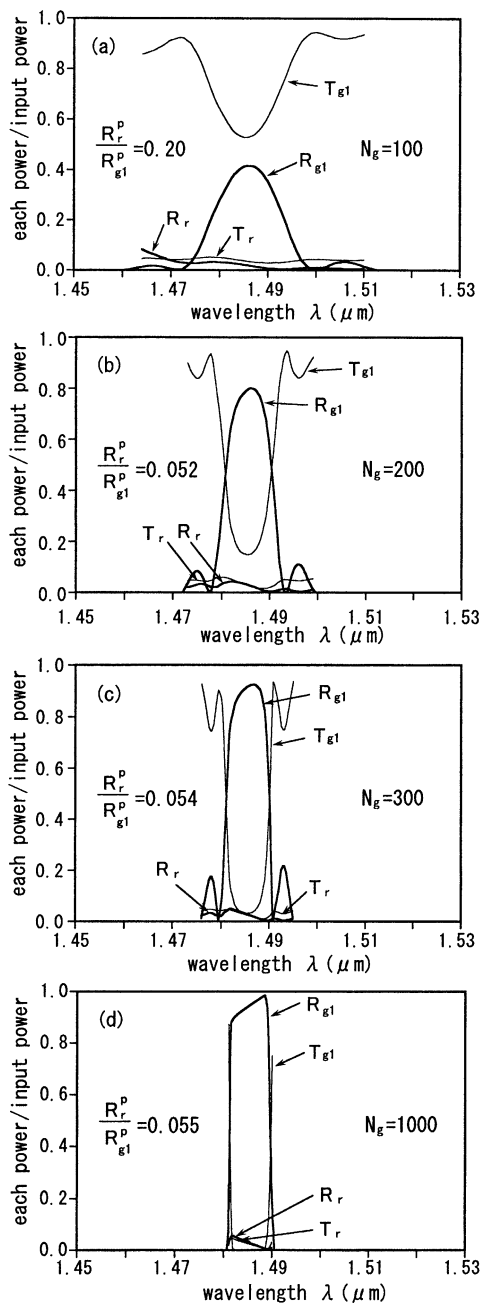


図3 $b_2=1.2[\mu\text{m}]$ ($\Delta b \sim 20\%$) で N_g を変えた時の基本導波モード電力 (R_{g1}, T_{g1}) と全放射波 (R_r, T_r) の反射電力の波長特性 (ガラス基板)

$$(\sqrt{\varepsilon_1} = 1.55, \sqrt{\varepsilon_2} = 1.45, \sqrt{\varepsilon_3} = 1.0, a = b_1 = 1.5[\mu\text{m}])$$

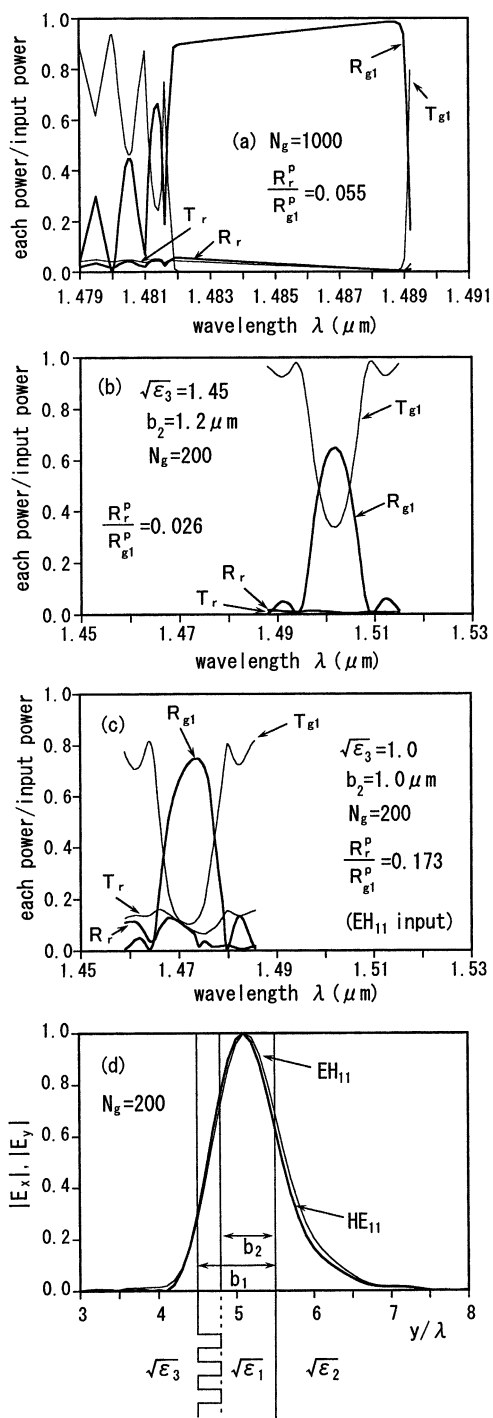


図4 図3と同様なパラメータでの各電力の波長特性 ((a) ~ (c)) と EH_{11} モード入射時の各基本モードの界分布 (d)

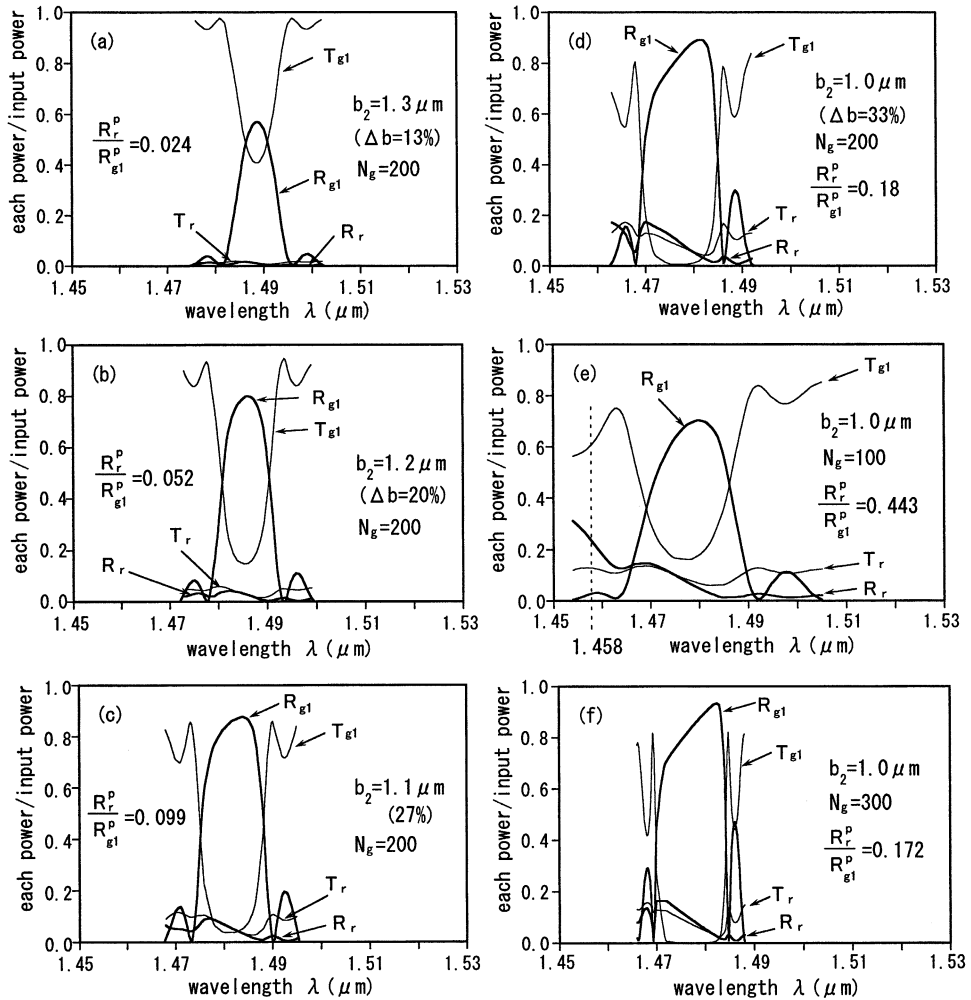


図5 b_2 (溝の深さ) を変えた時の各電力 (R_{g1}, T_{g1}, R_r, T_r) の波長特性 (ガラス基板)
 ($\sqrt{\epsilon_1} = 1.55, \sqrt{\epsilon_2} = 1.45, \sqrt{\epsilon_3} = 1.0, a = b_1 = 1.5[\mu\text{m}]$)

比較的低位 (低放射角) のモードで最大が 10^{-3} 程度であり、次数が高くなるにつれ (高放射角) 10^{-4} 以下であることが確認されている。 N_g が大きくなっても R_r^p/R_{g1}^p の値に大きい変化はない (図 5 (d), (f) 参照) ので同じ傾向を示すと言えよう (図 3)。従って、本論文の例題の範囲内では、仮想境界 Λ からの基本導波モードへの放射波の影響はほぼ無視することができる。 b_2 が $1.0[\mu\text{m}]$ ($\Delta b = 33\%$) と更に小さくなくても $N_g \geq 200$ では放射波の全電力は大きくなるが (図 5 (d))、各次の放射波モードの一つ一つはそれほど大きくならず、 R_{g1}^p に比べてまだ十分小さいと言えよう。しかし、 $N_g \leq 100$ では R_r^p/R_{g1}^p は 0.44 以上となるため (図 5 (e))、短波長側での放射波の存在は無視できなくなり、むしろ

導波モードだけでなく、放射モードにも着目した問題となる。更に、 b_2 を $1.0[\mu\text{m}]$ より小さくすると、領域 II 単独の一般導波路はカットオフ状態となり、lamellar grating 型周期構造光導波路として通用しなくなる。

図 6 には、ガラス基板での図 3 に対応して半導体基板について同様な計算結果を示している。これによれば、 N_g の変化による波長特性の傾向は同様であるが、溝の深さ Δb が半導体の場合が少し大きいためもあって、同じ N_g に対しても半導体の方が R_{g1} が大きく、放射波も大きい。このことはカバー (空気層) 側の凹凸部 (摂動部) での屈折率差 Δn が $(3.5 - 1.0)$ で大きいため、端部での回折が大きいためと考えられる。なお、半導体基板の場合は、屈折率が大きいため導波モード数をガラス基

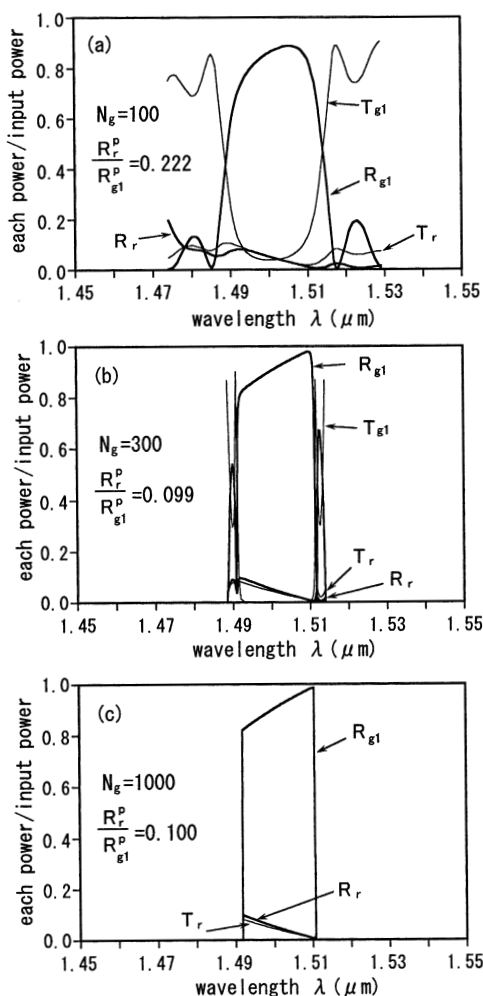


図6 $b_2=0.6[\mu\text{m}]$ ($\Delta b \sim 25\%$) で N_g を変えた時の基本導波モード電力 (R_{g1} , T_{g1}) と放射波電力 (R_r , T_r) の波長特性(半導体基板)

$$(\sqrt{\epsilon_1}=3.5, \sqrt{\epsilon_2}=3.15, \sqrt{\epsilon_3}=1.0, a=b_1=0.8[\mu\text{m}])$$

板の2個と同じになるように断面サイズを小さくしている ($a=b_1=0.8[\mu\text{m}]$).

図7 (a)~(c)には、ガラス基板の図5に対応して、溝の深さ b_2 を変えたときの半導体の場合の計算結果を示す。この場合も両基板で同様な傾向を示すが、半導体の場合が、導波モード数は同じでも波長幅が広く、図6の説明のときと同様放射波も大きい。同図(d),(e)は、 $\sqrt{\epsilon_3}$ を3.0と大きくした場合で、導波モード数が4個となり、ガラス基板の図4 (b)の場合と同様に R_r^p/R_{g1}^p がかなり小さく、放射波電力も大きく減少している。このことは次の図8 (d)で説明する。

図8 (a),(b)には、図7で N_g を1000とした場合を示し、 Δb が小さい程反射放射波電力 R_r が小さくなり、主ローブの波長特性の平坦度が増し、波長幅が更に狭くなることが分る。また同図(c)には、同図(a)の $\sqrt{\epsilon_3}$ を3.0に増したもので、図7 (d)と同様 R_r^p/R_{g1}^p がかなり小さく、放射波が抑制されて主ローブの平坦度がよくなることが分る。これは、同図(d)の反射基本モード R_{g1} の電界強度分布の $\sqrt{\epsilon_3}=1.0$ と3.0の場合の比較からも分るように、 $\sqrt{\epsilon_3}$ が3.0となれば、界分布のピークがカバー部にずれていくため、グレーティング導波路の摂動部(凹凸部)で反射基本導波モードと-1次空間高調波との結合が強くなり R_{g1} が大きくなること、更に、摂動部での屈折率差 $\Delta n = \sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_3}$ がかなり小さくなるため、摂動部端部からの散乱、回折が $\sqrt{\epsilon_3}=1.0$ の時に比べてかなり弱められるため、反射放射波も小さくなるものと考えられる⁽²⁷⁾。

以上の考察により、lamellar grating 型周期構造光導波路の設計に際し、広い波長範囲にわたって放射波の影響が少ない解を得るためには、 b_2 の値を大きめ、すなわち溝の深さ Δb を浅め(本例の導波路系では1.2 $[\mu\text{m}]$ 程度 ($\Delta b=20\%$)) にすることが望ましい。そのために反射率が所望より低ければ、 N_g をより大きくすることにより放射波を抑えつつ、任意に高い反射率の導波路が得られる(図3参照)。なお、通常の周期構造導波路の使用は基本導波モードの反射電力の主ローブ内の波長帯に着目しており、いずれの場合も放射波各モードの電力は基本モードのそれに比べて、パワー値で 10^{-4} 以下で無視できる程小さい。

図9 (a)には、短波長側での放射波電力がかなり大きい $b_2=1.0[\mu\text{m}]$, $N_g=100$, $\lambda=1.458[\mu\text{m}]$ の場合(図5 (e)参照)の $z=0$ (領域I)での放射波の各モードの電界強度分布 ($|E_x^1(x,y)|$, $|E_y^1(x,y)|$) を例示している。それぞれ入射波 E_x 主要の $\text{HE}_{11}(k=1)$ のモードなので E_y 成分は小さく、出力サイドには E_y 主要の EH_{mm} モードは弱く、その E_x 成分は更に小さな値となっている。そのため、同図には $k=2$ の EH_{11} モードは省略している。また、離散化された放射モードは導波モード数が2個なので、 $k=3$ の第1次放射モードから $k=882$ ($M=10$ なので全導波モード数は $2(2M+1)(2N+1)=882$ となる)まで放射し、それらが全て加わって全放射反射電力 R_r を構成している。この場合、高次になるにつれ放射角 (z 方向からのずれ) が大きくなり、電界強度も小さくなっていくことに注意を要する(詳細については文献(2)の付録Aを参照)。図9 (b)は $\sqrt{\epsilon_2}$ を1.40とし、導波モード数を4個 (HE_{11} , EH_{11} , HE_{21} , EH_{21}) とした場合の、やはり短波長領域で放射反射電力が大きくなる波長での各モードの電界強度分布を示す。図9 (c)は $\sqrt{\epsilon_2}$ を更に1.35

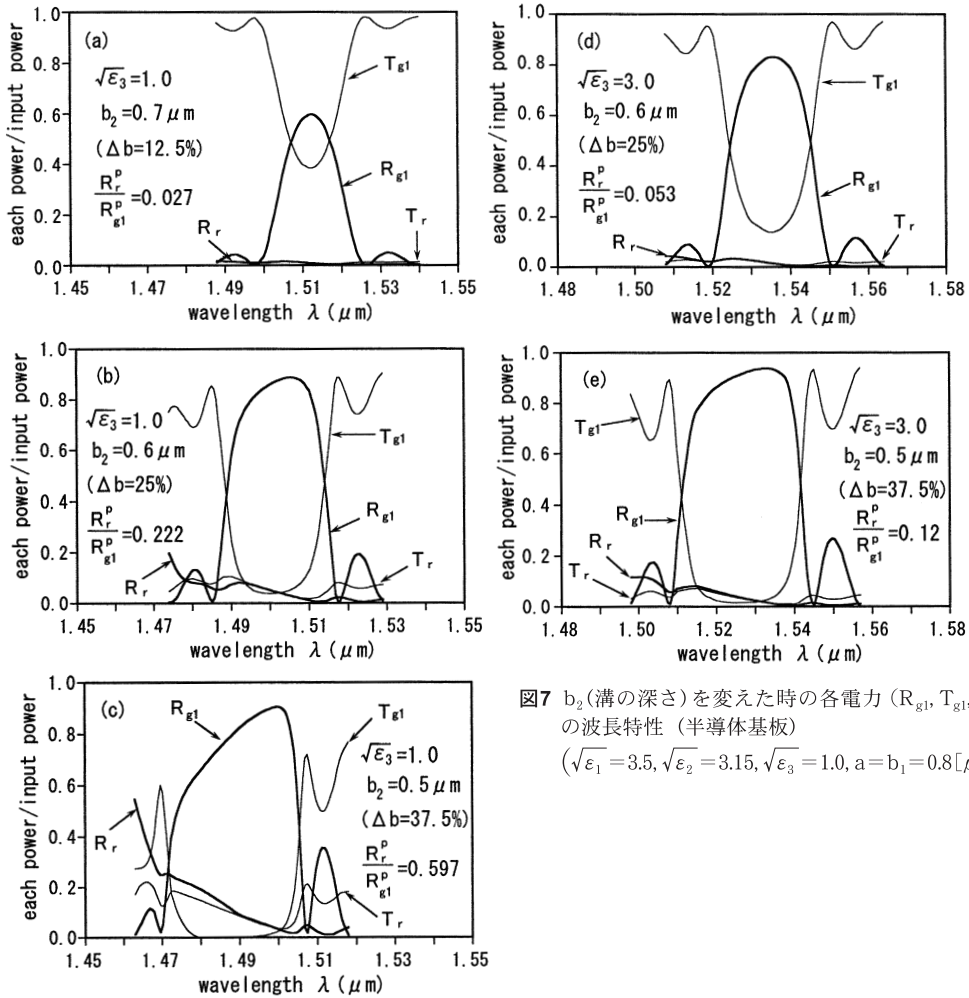


図7 b_2 (溝の深さ) を変えた時の各電力 (R_{g1} , T_{g1} , R_r , T_r) の波長特性 (半導体基板)
 $(\sqrt{\epsilon_1}=3.5, \sqrt{\epsilon_2}=3.15, \sqrt{\epsilon_3}=1.0, a=b_1=0.8[\mu\text{m}])$

まで小さくし、導波モード数は図9 (b)より HE_{12} , EH_{12} モードが加わり6個となり、第一次放射モードは $k=7$ から始まる。図9 (d)は、 $\sqrt{\epsilon_3}$ を $\sqrt{\epsilon_2}$ と同じ1.45とし、完全埋込型 (図4 (b)) の場合の電界強度分布で導波モード数は4個なので第一次放射モードは $k=5$ から始まり、パターンは x 軸、 y 軸に対して対称となっている。この場合は、図4 (b)でも説明したように反射放射波電力がかなり小さい場合なので本図での放射モードの電界強度もかなり小さくなっていることが分る。それぞれのパターンは、 b_2, N_g, λ の各値に関係なく領域 I での固有ベクトル \mathbf{P}^1 によって定まるが、ピーク値の大きさは $\mathbf{a}^{1*}(0)$ で決定される。

本論文での断面サイズ、屈折率分布の数値例においては、各場合共、伝搬可能な導波モード数は、領域 I, II が単独にある場合のよう導波路において、それぞれ

HE_{11}, EH_{11} の2個ずつであり、周期構造導波路としての導波可能モード数は2個である。但し、入射モードが HE_{11} のときは、出力側には EH_{11} はほとんど零と見なされる (10^{-25}) のため基本モード伝送可能となる。本論文の計算例では、展開項数、周期数に関係なく安定な計算が行えるよう算法を工夫しているの⁽²⁰⁾、エバネッセント波を含んでいる場合でも、周期数に関係なく、各電力の合計値 (式(3)の左辺) の1 (規格化入力値) からの差はそれぞれ 10^{-10} 以下である。

4. まとめ

ガラス基板及び半導体基板の方形断面の lamellar grating 型周期構造光導波路において、グレーティングの溝の深さ Δb を変えた時と周期数を100~1000まで変えた時の導波モード、放射波の反射及び透過各電力の波

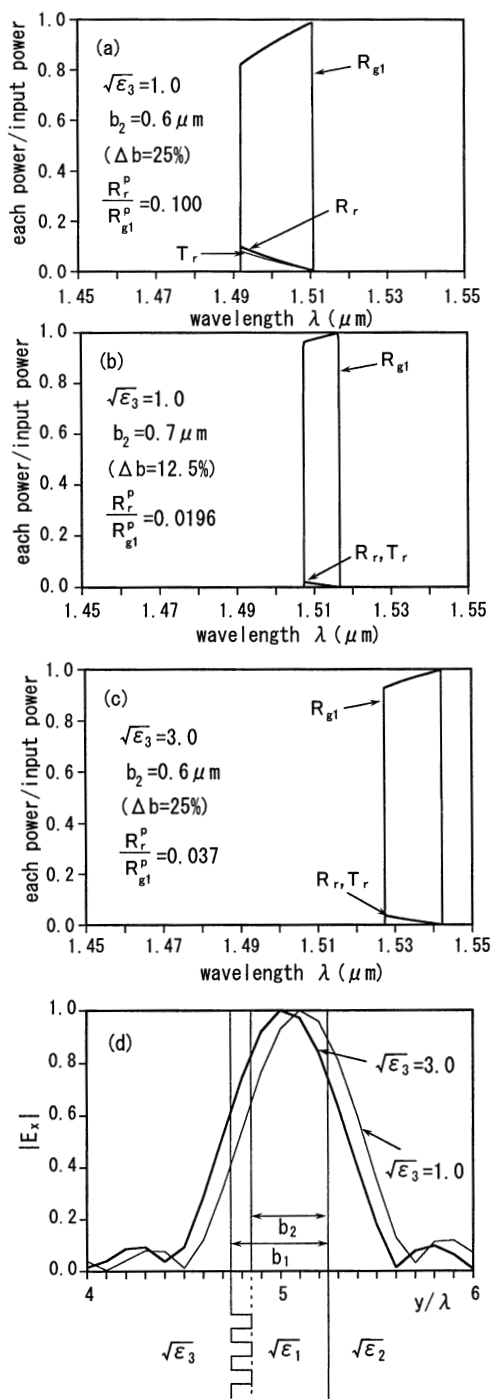


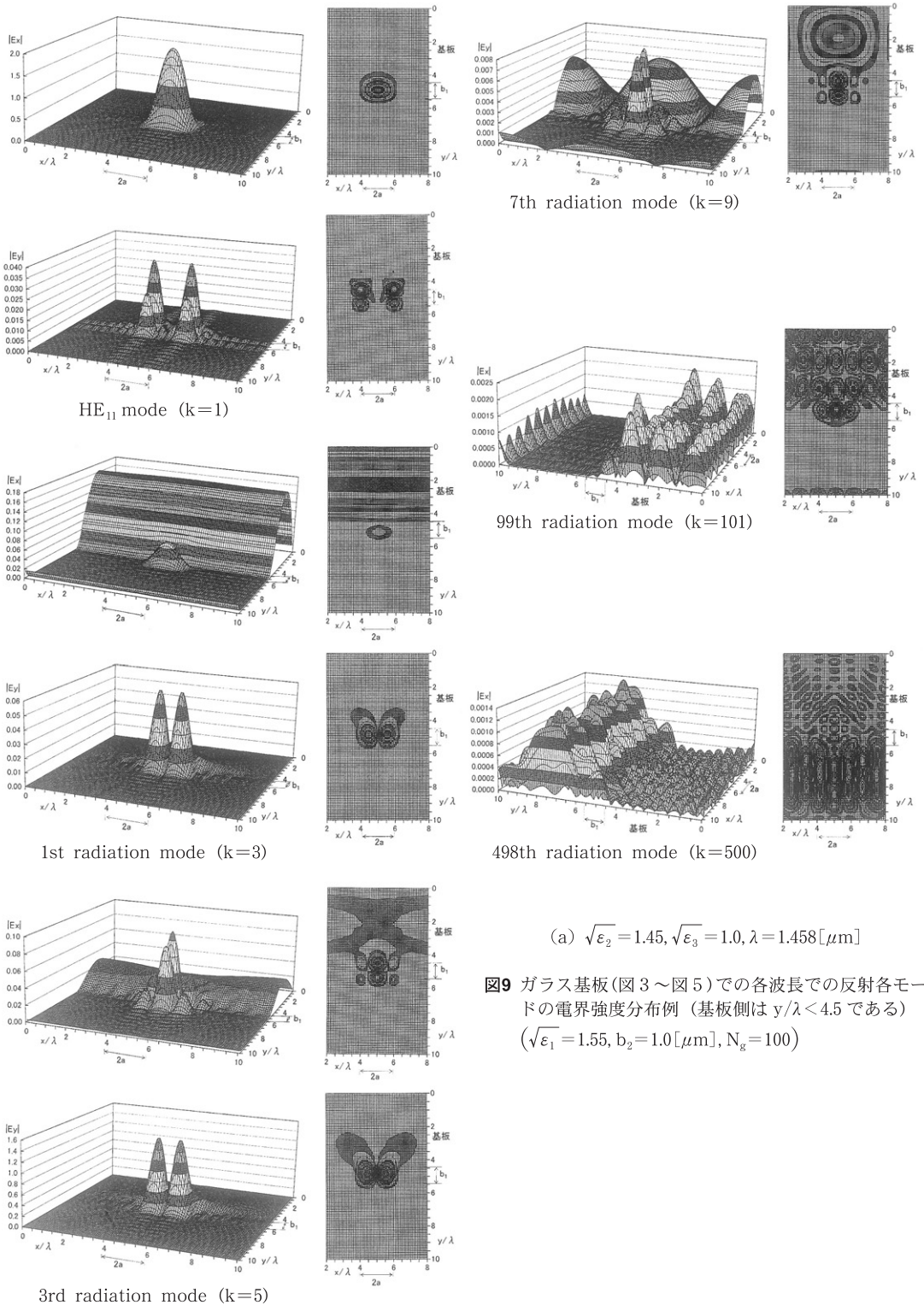
図8 半導体基板で導波路のパラメータを変えた時の反射基本導波モード電力 R_{g1} と放射波電力 R_r の変化 (a) ~ (c) 及び基本導波モードの電界強度分布 (d) ($\sqrt{\epsilon_1}=3.5, \sqrt{\epsilon_2}=3.15, a=b_1=0.8[\mu\text{m}], N_g=1000$)

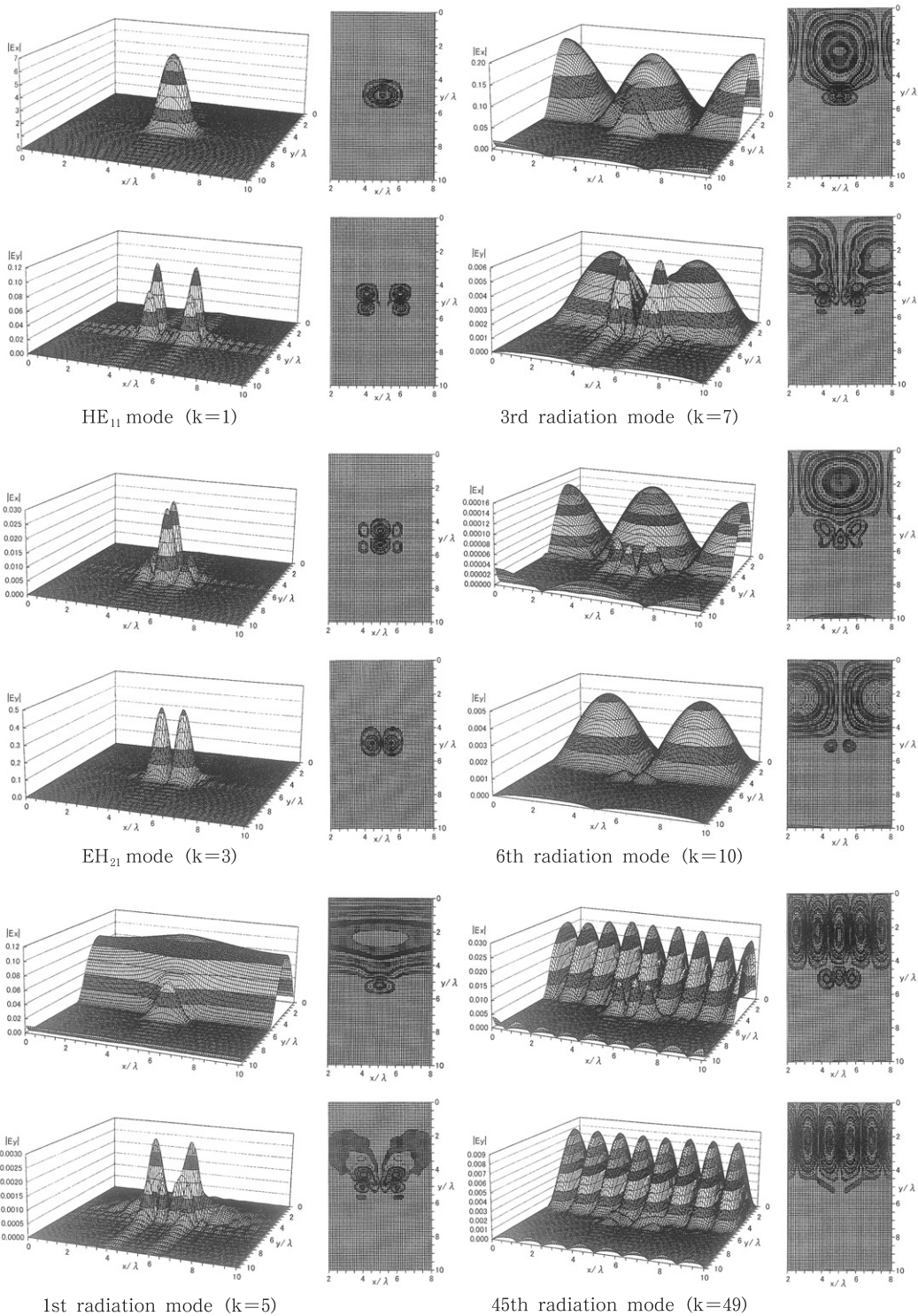
長特性を、改善されたフーリエ級数展開法^{(8), (20)}を適用して、より詳しい数値解析を試みた。その結果、放射波の影響も含めてそれぞれの場合の特性を明らかにすると共に、本構造が基本導波モードの周期構造導波路として有効に動作するための各パラメータの選択の目安を与えている。また、本算法が周期数に関係なく、エバネッセント波も含めた各種3次元周期構造導波路の解析に有用であることが確認された。

参考文献

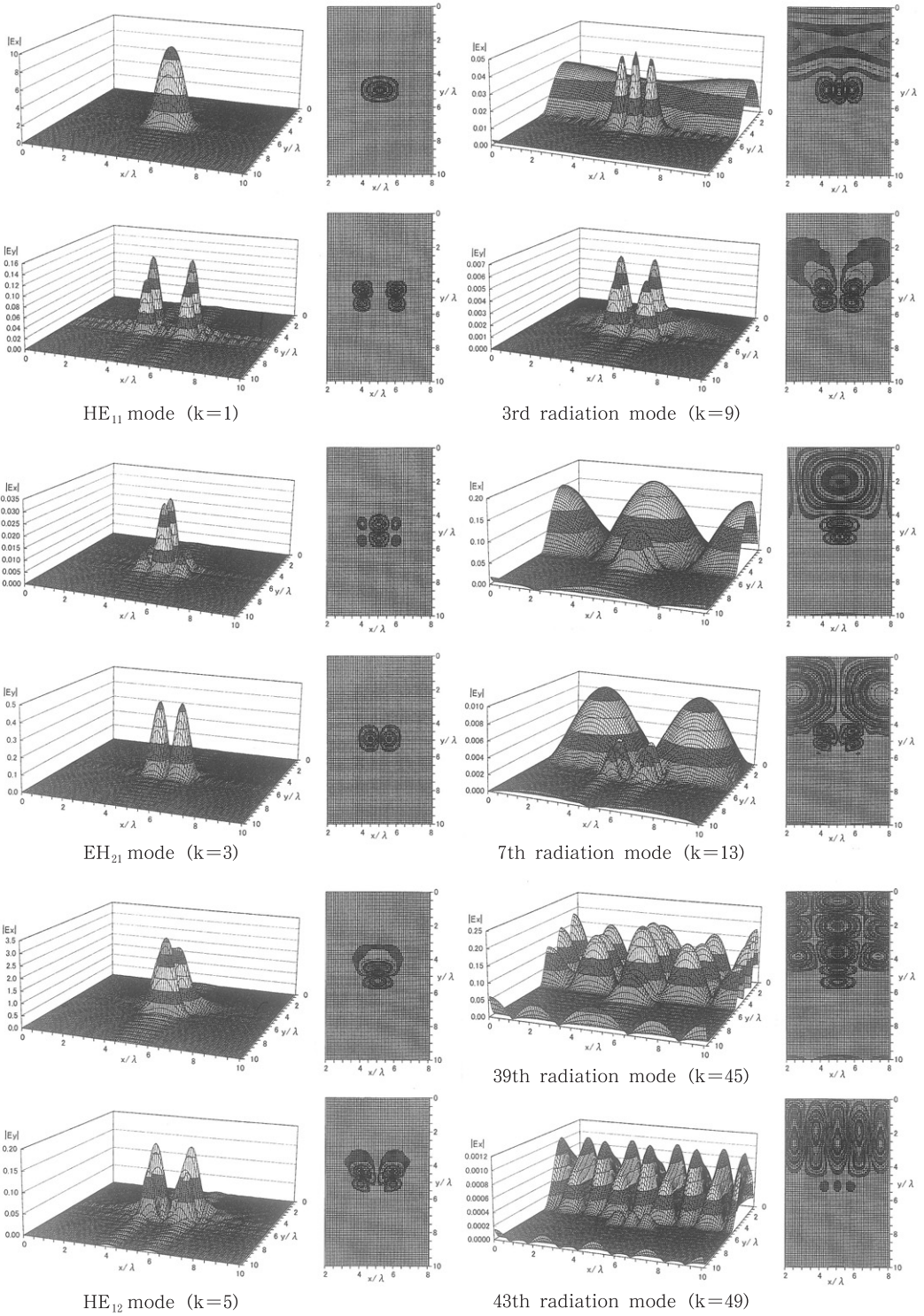
- (1) J. Shibayama, T. Takahashi, J. Yamauchi and H. Nakano: "Efficient time-domain finite-difference beam propagation methods for the analysis of slab and circularly symmetric waveguides", *J. of Lightwave Technology*, Vol.18, No.3, pp.437-442 (2000-3)
- (2) 山内潤一, 沼田 伶, 中野久松: "回転対称 Yee 格子に基づいた虚軸ビーム伝搬法による固有モード解析", 2001年電子情報通信学会総合大会, C-1-39, p.39 (2001-3)
- (3) 辻 寧英, 佐藤和宏, 小柴正則: "周期構造光導波路の3次元フルベクトル双方向固有モード伝搬解析", 2000年電子情報通信学会ソサイエティ大会(エレクトロニクス), C-3-139, p.265 (2000-10)
- (4) 佐藤和宏, 小柴正則, 辻 寧英: "3次元光導波路解析のための時間領域ビーム伝搬法", 2001年電子情報通信学会総合大会, C-3-159, p.324 (2001-3)
- (5) Stefan F. Helfert and R. Pregla: "Efficient analysis of periodic structures", *J. of Lightwave Technology*, Vol.16, No.9, pp.1694-1702 (1998-9)
- (6) K. Yasumoto and K. Ohzawa: "Analysis of a step transition in optical fibers using periodic boundary conditions", *Asia-Pacific Microwave Conf. Proc.*, pp.665-668, Hong Kong (1997)
- (7) T. Miyamoto, M. Momoda and K. Yasumoto: "Analysis of an embedded dielectric waveguide with parabolic index distribution in the two-dimensional cross section", 1998 Int. Conf. on Microwave and Millimeter wave Technology Proc., pp.841-844, Beijing, China (1998-8)
- (8) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による3次元光導波路の数値解析", 福岡大学工学集報, Vol.64, pp.167-185 (2000-3)
- (9) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による3次元導波路の接続問題の解析(II)", 電子情報通信学会技術報告, Vol.99, No.26, AP-99-86 (EMT-99-65), pp.65-71 (1999-8)

- (10) T.Miyamoto, M.Momoda and K.Yasumoto: "Full-vectorial analysis of connection problem in optical fiber", 電学論 A, Vol.122-A, No.1, pp.39-46 (2002-1)
- (11) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "フーリエ級数展開法によるファイバグレーティングの解析", 2000年電子情報通信学会総合大会, C-3-72, p.252 (2000-3)
- (12) K.Yasumoto and H.Toyama: "Formulation for electro-magnetic scattering and guidance by two-dimensional photonic crystals", 信学技報, OPE-2001-93, pp.29-34 (2001-11)
- (13) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による3次元周期構造導波路の解析", 電子情報通信学会技術報告, Vol.101, No.584, PS2001-95 (EMT-02-25), pp.1-6 (2002-1)
- (14) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "周期構造3次元光導波路の数値解析", 2002信学総大, C-1-13, p.13 (2002-3)
- (15) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "周期構造3次元光導波路の数値解析(II)", 2002信学ソサ大, C-1-17, p.17 (2002-9)
- (16) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "周期構造3次元光導波路の数値解析(III)", 平成14年度電気関係学会九州支部連合大会, 1254, p.676 (2002-9)
- (17) 百田美智子, 宮本徳夫, 安元清俊: "周期構造3次元光導波路の数値解析(IV)", 平成14年度電気関係学会九州支部連合大会, 1255, p.677 (2002-9)
- (18) T. Miyamoto, M. Momoda and K. Yasumoto: "Numerical analysis for 3-dimensional optical periodic waveguides with rectangular cross-section", Proc. of 4th Asia-Pacific Engineering Research Forum on Microwaves and Electromagnetic Theory, pp.136-144 (2002-9)
- (19) T. Miyamoto, M. Momoda and K. Yasumoto: "Numerical analysis of 3-dimensional periodic waveguide", Proc. of PIERS2003, p.233 (2003-6)
- (20) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による3次元周期構造光導波路の数値解析法と精度の検討", 福岡大学工学集報, Vol.70, pp.55-82 (2003-5)
- (21) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による周期構造3次元光導波路の解析", 電子情報通信学会論文誌 C, Vol.J86-C, No.6, pp.591-600 (2003-6)
同上 selected English version, Electronics and Communications in Japan, Part 2, Vol.86, No.12, pp.22-31 (2003-12)
- (22) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "屈折率変調型3次元周期構造光導波路の解析", 福岡大学工学集報, Vol.74, pp.21-39 (2005-3)
- (23) M.Tsuji, S. Matsumoto, H. Shigesawa and K. Takiyama: "Guided-wave experiments with dielectric waveguides having finite periodic corrugation", *IEEE Trans. Microwave Technology and Techniques*, Vol. MTT-31, No.4, pp.337-344 (1983-4)
- (24) M.Matsumoto: "Analysis of radiation properties of channel-waveguide gratings", *J.Opt.Soc.Am.B*, Vol.8, No.2, pp.434-442 (1991-2)
- (25) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "フーリエ級数展開法によるLamellar grating型3次元周期構造光導波路の数値解析", 電学論(A), Vol.123, No.12, pp.1151-1158 (2003-12)
同上 selected translation in English, Electrical Engineering in Japan, Vol.149, No.2, pp.1-9 (2004-1) (Wiley)
- (26) 宮本徳夫, 百田美智子, 安元清俊: "フーリエ級数展開法による方形断面 lamellar grating 型周期構造光導波路の数値解析", 電磁界理論研究会資料 EMT-02-91, pp.87-92 (2002-10)
- (27) H.Kogelnik: "Periodic waveguide" in *Integrated Optics*, ed. T. Tamir, § 2.6.4 Springer-Verlag (1979)
- (28) S.Xu, J.Liu, K.Yasumoto and K.S.Chiang: "The effect of radiation on transmission of quasi-periodic multi-layer planar dielectric gratings", *Int. J. of Infrared and Millimeter waves*, Vol.20, No.4, pp.681-698 (1999)

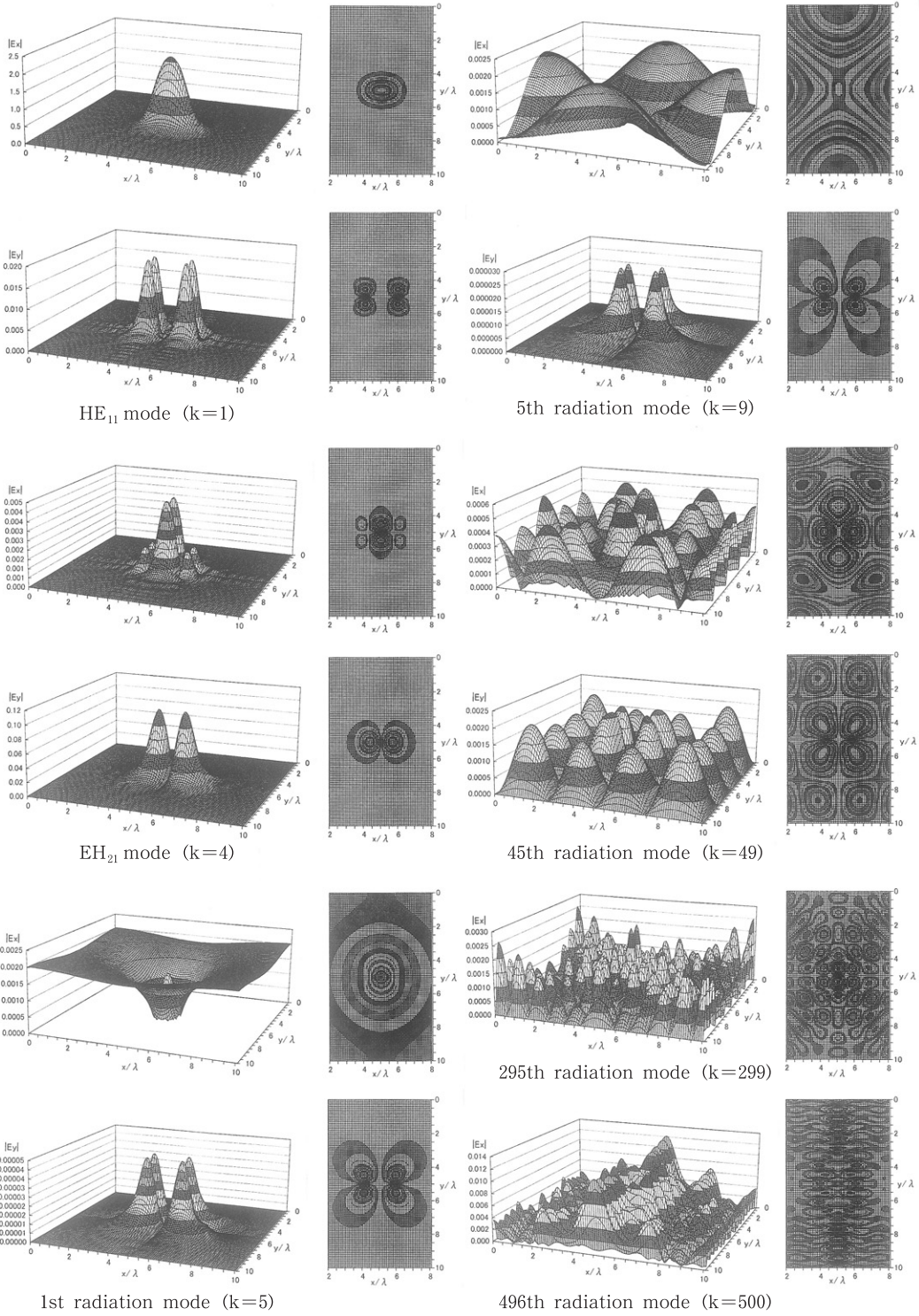




(b) $\sqrt{\epsilon_2} = 1.4, \sqrt{\epsilon_3} = 1.0, \lambda = 1.458[\mu\text{m}]$



(c) $\sqrt{\epsilon_2} = 1.35, \sqrt{\epsilon_3} = 1.0, \lambda = 1.458 [\mu\text{m}]$



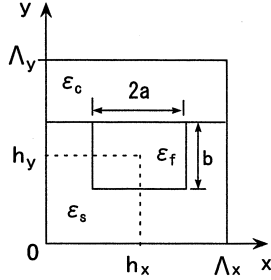
$$(d) \sqrt{\epsilon_2} = 1.45, \sqrt{\epsilon_3} = 1.45, \lambda = 1.491 [\mu\text{m}] (b_2 = 1.2 [\mu\text{m}], N_g = 200)$$

付録A $\frac{d}{dz} \iint \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\} \cdot \mathbf{z} \, dx dy = 0$ の証明

導波路系が無損失の場合は、本文式(10)の係数行列 \mathbf{C} の固有値 κ^2 が実数となることは、 \mathbf{C} がエルミット行列 ($\mathbf{C}^t = \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^t$) を証明すればよいが、本文 \mathbf{C} のエルミット性を直接証明することは容易でない。そこで、まず \mathbf{C} の要素である行列 \mathbf{A} のエルミット性 ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^t$) を証明した後、これを含む z 方向への伝送電力 (時間平均) が z 方向に増減なく一定であること、すなわち

$$\frac{d}{dz} \iint \{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\} \cdot \mathbf{z} \, dx dy = 0 \quad (\text{A1})$$

を証明することにより、 \mathbf{C} の固有値 κ^2 が実数 (虚数部を含まない) であることを間接的に示すことにする。



図A1 方形断面埋込型光導波路 ($\epsilon_c, \epsilon_f, \epsilon_s$ は各領域での誘電率)

図A1の方形断面埋込型光導波路における $\epsilon_{p,q}$ を本文の式(9)で計算すると次のようになる。

(i) $p \neq 0, q \neq 0$ の時

$$\epsilon_{p,q} = (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi p} \left(e^{-j2\pi h_x p / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} p \right) \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi q} \left(e^{-j2\pi h_y q / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} q \right) \right\}$$

(ii) $p \neq 0, q = 0$ の時

$$\epsilon_{p,0} = \frac{b}{\Lambda_y} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi p} \left(e^{-j2\pi h_x p / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} p \right) \right\}$$

(iii) $p = 0, q \neq 0$ の時

$$\epsilon_{0,q} = \frac{j}{2\pi q} (\epsilon_c - \epsilon_s) (1 - e^{-j2\pi(h_y + b/2)q / \Lambda_y}) \\ + \frac{2a}{\Lambda_x} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi q} \left(e^{-j2\pi h_y q / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} q \right) \right\}$$

(iv) $p = q = 0$ の時

$$\epsilon_{0,0} = \epsilon_c + \frac{h_y + b/2}{\Lambda_y} (\epsilon_s - \epsilon_c) + \frac{2ab}{\Lambda_x \Lambda_y} (\epsilon_f - \epsilon_s)$$

これらを要素とする行列 \mathbf{A} は次のようになる。

$$\mathbf{A} = [\epsilon_{p,q}] \quad (p = m - m', q = n - n')$$

$$= \begin{bmatrix} \epsilon_{0,0} & \cdots & \epsilon_{0,2N} & \cdots & \epsilon_{2M,0} & \cdots & \epsilon_{2M,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{0,-2N} & \cdots & \epsilon_{0,0} & \cdots & \epsilon_{2M,-2N} & \cdots & \epsilon_{2M,0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{-2M,0} & \cdots & \epsilon_{-2M,2N} & \cdots & \epsilon_{0,0} & \cdots & \epsilon_{0,2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{-2M,-2N} & \cdots & \epsilon_{-2M,0} & \cdots & \epsilon_{0,-2N} & \cdots & \epsilon_{0,0} \end{bmatrix}$$

この行列の対角項を除く各項 $\epsilon_{p,q}$ に対して転置された項での値が $\epsilon_{-p,-q}$ となっている。従って、 $\epsilon_{p,q}$ の複素共役を実際に計算して $\epsilon_{p,q}^* = \epsilon_{-p,-q}$ となることを示せば、 $[\epsilon_{p,q}]^t = [\epsilon_{p,q}]^*$ が証明されたことになる。

(i) $p \neq 0, q \neq 0$ の時

$$\epsilon_{p,q}^* = (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi p} \left(e^{j2\pi h_x p / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} p \right) \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi q} \left(e^{j2\pi h_y q / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} q \right) \right\} \\ = (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi(-p)} \left(e^{-j2\pi h_x (-p) / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} (-p) \right) \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi(-q)} \left(e^{-j2\pi h_y (-q) / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} (-q) \right) \right\} \\ = \epsilon_{-p,-q}$$

(ii) $p \neq 0, q = 0$ の時

$$\epsilon_{p,0}^* = \frac{b}{\Lambda_y} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi p} \left(e^{j2\pi h_x p / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} p \right) \right\} \\ = \frac{b}{\Lambda_y} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi(-p)} \left(e^{-j2\pi h_x (-p) / \Lambda_x} \sin \frac{2\pi a}{\Lambda_x} (-p) \right) \right\} \\ = \epsilon_{-p,0}$$

(iii) $p = 0, q \neq 0$ の時

$$\epsilon_{0,q}^* = \frac{-j}{2\pi q} (\epsilon_c - \epsilon_s) (1 - e^{j2\pi(h_y + b/2)q / \Lambda_y}) \\ + \frac{2a}{\Lambda_x} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi q} \left(e^{j2\pi h_y q / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} q \right) \right\} \\ = \frac{j}{2\pi(-q)} (\epsilon_c - \epsilon_s) (1 - e^{-j2\pi(h_y + b/2)(-q) / \Lambda_y}) \\ + \frac{2a}{\Lambda_x} (\epsilon_f - \epsilon_s) \left\{ \frac{1}{\pi(-q)} \left(e^{-j2\pi h_y (-q) / \Lambda_y} \sin \frac{\pi b}{\Lambda_y} (-q) \right) \right\} \\ = \epsilon_{0,-q}$$

(i) ~ (iii) より、 $\epsilon_{p,q}^* = \epsilon_{-p,-q}$ であり $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^t$ が証明された。これより \mathbf{A}^{-1} についても $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ において、

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{A}^{-1})^t \mathbf{A}^t = (\mathbf{A}^{-1})^t \mathbf{A} = \mathbf{E}^t = \mathbf{E} = \mathbf{E} \\ \therefore (\mathbf{A}^{-1})^t \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \therefore (\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{A}^{-1}$$

となるので、 \mathbf{A}^{-1} もエルミット行列である。

次に、 \mathbf{N}, \mathbf{M} は実数の対角行列なので $\mathbf{M}^t = \mathbf{M}, \mathbf{N}^t = \mathbf{N}$ である。これらの性質を利用して式(A1)を証明する。文献(8)の付録Aより式(A1)の左辺は本文の式(4)~(7)の展開係数のベクトル表示 $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y), (\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y)$ によって次のベクトルの内積 (スカラー積) で表される。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \iint \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} \} \cdot \mathbf{z} \, dx dy \\ &= \frac{d}{dz} \iint \{ (E_x H_y^* - E_y H_x^*) + (E_x^* H_y - E_y^* H_x) \} \, dx dy \\ &= \frac{d}{dz} \{ (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{h}_y^* - \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{h}_x^*) + (\mathbf{e}_x^* \cdot \mathbf{h}_y - \mathbf{e}_y^* \cdot \mathbf{h}_x) \} \\ &= \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{e}_x}{dz} \cdot \mathbf{h}_y^* - \frac{d\mathbf{e}_y}{dz} \cdot \mathbf{h}_x^* + \mathbf{e}_x \frac{d\mathbf{h}_y^*}{dz} - \mathbf{e}_y \frac{d\mathbf{h}_x^*}{dz} \right)}_{(イ)} \\ & \quad + \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{e}_x^*}{dz} \cdot \mathbf{h}_y - \frac{d\mathbf{e}_y^*}{dz} \cdot \mathbf{h}_x + \mathbf{e}_x^* \frac{d\mathbf{h}_y}{dz} - \mathbf{e}_y^* \frac{d\mathbf{h}_x}{dz} \right)}_{(ロ)} \end{aligned} \quad (A2)$$

ここで、 $\frac{d\mathbf{e}_x}{dz}, \frac{d\mathbf{h}_x}{dz}$ 等を本文の式(4), (5)で表わし、式(A2)の各項の内積 (スカラー積) がスカラー量であることより次のように式(A2)の(イ), (ロ), (ハ), (ニ)を計算する。

$$\begin{aligned} (イ) \quad & \frac{d\mathbf{e}_x}{dz} \cdot \mathbf{h}_y^* - \frac{d\mathbf{e}_y}{dz} \cdot \mathbf{h}_x^* \\ &= \left\{ -j(\mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} \quad \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \right\} \cdot \mathbf{h}_y^* \\ & \quad - \left\{ -j(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I} \quad -\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M}) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \right\} \cdot \mathbf{h}_x^* \end{aligned}$$

これを行列形式でまとめると次のように表わされる。

$$(イ) = -j \left[\begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x^* \\ \mathbf{h}_y^* \end{pmatrix} \quad (A3)$$

ここでベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ の内積について、

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^t &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ なので,} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = (a_x \ a_y) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x & b_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を参照して、式(A3)は次のようになる。

$$(イ) = -j \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x^* \\ \mathbf{h}_y^* \end{pmatrix}^t \left[\begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \right] \quad (A4)$$

同様に、式(A2)の(ロ)は式(A3)の複素共役なので

$$\begin{aligned} (ロ) &= \frac{d\mathbf{e}_x^*}{dz} \cdot \mathbf{h}_y - \frac{d\mathbf{e}_y^*}{dz} \cdot \mathbf{h}_x \\ &= \left[-j \begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。右辺の [] は

$$\begin{aligned} & j \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \\ &= j \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、 $(\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{A}^{-1}$ を参照して式(A2)の(ロ)は

$$(ロ) = j \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -(\mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{I}) & \mathbf{N}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \\ \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x \\ \mathbf{h}_y \end{pmatrix} \quad (A5)$$

となる。したがって、式(A4), (A5)より式(A2)の(イ) + (ロ) = 0が導かれる。

同様に、式(A2)の(ハ) + (ニ) = 0が導かれるので、(イ) + (ロ) + (ハ) + (ニ) = 0となり式(A1)が証明された。なお、式(A5)の導出において、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 & \mathbf{X}_4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^t & \mathbf{X}_2^t \\ \mathbf{X}_3^t & \mathbf{X}_4^t \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{ABC}]^t = \mathbf{C}^t(\mathbf{AB})^t = \mathbf{C}^t\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$$

の関係式を使っている。

付録B 仮想周期の大きさ $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda$ と展開項数 ($\mathbf{M} = \mathbf{N}$) による固有値の収束状況

半径 a の光ファイバ導波路の基本モードにおいて、仮想周期 Λ の大きさに対して展開項数 M を変えた時の固有値 κ_1 の収束特性を求めた結果を次の表Bに示す。

本例の固有値の数値結果より、 $\Lambda = 30\lambda$ の時、すなわち $\Lambda/2a = 4.33$ の時 M を20程度までとれば真値 $\kappa_1 = 1.46006808$ に近づくことが分る。このことより、仮想周期の大きさが導波路部の直径の約4倍以上あれば固有値の計算値を8桁程度の精度まで M を上げるにより求められることが分る。

表B 仮想周期の大きさ $\Lambda_x = \Lambda_y = \Lambda$ と展開項数 ($M=N$) による固有値 κ_1 の収束性

Λ M	10λ	14λ	21λ	30λ	35λ
6	1.460315857	1.460099222	1.460066116	1.460055941	1.460052986
8	1.460316089	1.460099748	1.460067747	1.460064370	1.460060047
10	1.460316140	1.460099939	1.460068337	1.460065792	1.460065003
12	1.460316168	1.460100020	1.460068718	1.460067055	1.460065913
14	1.460316179	1.460100059	1.460068868	1.460067420	1.460067012
16	1.460316182	1.460100079	1.460068941	1.460067755	1.460067372
18	1.460316183	1.460100089	1.460069000	1.460067895	1.460067640
20	1.460316183	1.460100094	1.460069029	1.460068007	1.460067847
22			1.460069046	1.460068074	1.460067925
24				1.460068118	

$$\sqrt{\varepsilon_f} = 1.462, \sqrt{\varepsilon_c} = 1.458, \text{コア円の分割数}^{(8)} K = 100, 2a = 6.92\lambda$$

