情報構造をもつ n 人囚人のジレンマにおける協力均衡の進化的安定性について

西　原　　宏*

論文要旨　n 人囚人のジレンマにおいて、順序がランダムに決定される逐次手番とプレイヤー間で非協力行動が互いに観察される情報構造を考える。線形利得関数の仮定のもとで、このゲームには協力均衡と非協力均衡の２つの均衡が存在するが、前者が Kandori, Mailath and Rob（1993）の進化ゲームにおける長期均衡となるための十分条件を明らかにする。これによって、社会が十分に大きく非協力のインセンティブが十分に小さければ、人々の長期間の試行錯誤によって社会的ジレンマが回避され得ることが示唆される。

１．序

個人の利己的な行動はしばしば社会にとって望ましくない結果を引き起こす。家畜の過放牧による牧草地の砂漠化、自動車の過剰利用による道路の渋滞や大気汚染、生活排水による河川の汚染などがその例である。これらの状況は社会的ジレンマと呼ばれる。社会的ジレンマの構造は標準形ゲームの n 人囚人のジレンマによって表される。このゲームでは各プレイヤーは協力と非協力の２つの選択肢を持ち、他のプレイヤーの選択が何であろうとも非協

*福岡大学経済学部

力を採る方が協力を採るよりも大きな利得となる。しかしながら、全員が非協力をとるときの利得は全員が協力を採るときの利得よりも小さい。こうして n 人囚人のジレンマは個人の利己的な行動が社会にとって悪い結果をもたらす状況を表す。

社会的ジレンマの解決の手がかりを求めて、n 人囚人のジレンマを修正してプレイヤーの協力を導こうとする試みがこれまでに多くの研究者によってなされてきた。ゲームの繰り返し（Fudenberg and Maskin 1986, Fudenberg, Levine and Maskin 1994 など）や社会的ルール形成（Okada 1993 など）、不完備情報（Kreps, *et al*. 1982, Neymann 1999）を考慮に入れた分析がそれである。Nishihara（1997）は同時手番の仮定を緩め、プレイヤーの手番の順序がランダムに決められる逐次手番で、どのプレイヤーも自分の前に協力がとられてもそれは分からないが非協力が採られればそれが分かるという情報構造を持てば、全員が協力するナッシュ均衡が存在することを示した。さらに、西原（2007）は、全てのプレイヤーが共通の並行型（非協力を採るときの利得増が一定）線形利得関数を持つならば、ナッシュ均衡は全員が協力をプレイする均衡（協力均衡）と全員が非協力をプレイする均衡（非協力均衡）の２種類しかないことを示している。

西原（2007）はナッシュ均衡の絞込みを行ったが、依然として協力均衡と非協力均衡の２つの対照的な均衡が残されている。この２種類の均衡から１つをさらに絞り込むことが本稿のねらいである。ナッシュ均衡の選択については、例えば、Harsanyi and Selten（1988）や van Damme（1992）などによってこれまで多くの研究がなされて来た。その中で、1990年代以降に大きく発展したものとして進化ゲームの理論がある[1]。そこでは、プレイヤーは他者との戦略的な相互関係を熟慮し内省的（introspective）に戦略の決定をするのではなく、ランダムにマッチングしてゲームをプレイしながら試行錯誤的学習によって戦略を修正していく。本稿では Kandori, Mairath and Rob

(1993) によって提案された進化ゲームのモデルを均衡選択の理論として採用する（以下 KMR 進化ゲームと呼ぶ)。本稿の目的は、並行型の線形利得関数のもとで協力均衡が選択されるか否かまたそのための条件は何かを明らかにすることである。

本稿における分析の結果、協力均衡が進化ゲームで長期均衡として選択されるための十分条件が導き出される。その条件は、プレイヤーのマッチングの母集団が十分に大きいこと、非協力をとるときの利得の増分（非協力のインセンティブ）が十分に小さいことを要件とする。この結果によって、十分に大きな社会において、非協力のインセンティブがあまり大きくない n 人囚人のジレンマで非協力が互いに観察されるならば、社会的ジレンマの発生は社会の成員の試行錯誤的学習によって回避される可能性があることが示唆される。

本稿の構成は以下の通りである。次章ではモデルを示す。これは、基本モデルとしての n 人囚人のジレンマ、非協力が観察される囚人のジレンマ、さらにその KMR 進化ゲームの 3 つからなる。第 3 章では、2 人囚人のジレンマの場合と n 人（$n \geq 3$）囚人のジレンマの場合に分けて分析を行う。第 4 章は結句とする。全ての証明は付録に収められる。

2．モデル

2.1. n 人囚人のジレンマ

n 人囚人のジレンマは、標準形ゲーム$<N, \{C,D\}, \{f_i\}_{i \in N}>$によって与え

[1] Marnard Smith（1982）は、生物進化に関する先駆的研究である。その後、戦略の淘汰のプロセスを明示的に表すモデルが Kandori, Mailath and Rob（1993）や Young（1993）などによって提案され、経済学における均衡選択理論として受け入れられている。

られる。ここで、$N=\{1,2,...,n\}$ $(n\geq 2)$ はプレイヤーの集合、C（協力）と D（非協力）は各プレイヤーの行動、$f_i:\{C,D\}\times\{0,1,...,n-1\}\rightarrow R$ はプレイヤー i の利得関数である。利得関数 $f_i(a,k)$ の値は、プレイヤー i が行動 $a\in\{C,D\}$ をとり、他の k 人のプレイヤーが C をとるときの i のフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の値を表す。各 $i\in N$ について、次の３つの条件が仮定される：

（A.1）$k=0,1,...,n-1$ について $f_i(C,k)<f_i(D,k)$,

（A.2）$f_i(C,n-1)>f_i(D,0)$,

（A.3）$f_i(C,k)$ と $f_i(D,k)$ は、k について厳密な増加関数。

仮定（A.1）は、他のプレイヤーの選択に関わりなく、C をとるよりも D をとる方が高い利得が得られることを意味する。（A.2）は、全員が D をとる状況よりも全員が C をとる状況の方が全員にとって望ましいことを意味する。（A.3）は、C、D どちらの行動をとった場合でも、他のプレイヤーの中で C をとる者が多いほど利得は高くなることを意味する。（A.1）により、どのプレイヤーにとっても行動 D が強支配戦略である。しかし、（A.2）より、どのプレイヤーにとっても全員が C をとる状況の方が、全員が D をとる状況よりも望ましい。このためにこのゲームは n 人囚人のジレンマと呼ばれる。

2.2. 非協力が観察される n 人囚人のジレンマ

n 人囚人のジレンマを次のような展開形ゲームに変形する。

（ｉ）始めに自然が $1,2,...,n$ の順列の全体から１つを一様分布の確率分布によって選び出す。

（ii）自然の選択の後、各プレイヤーはそこで決められた順番に従って行動 C または D を選択する。

（iii）各プレイヤーは、自分の手番より前に少なくとも１人のプレイヤーが

D を採ったならばそれが判る。

（iv）すべてのプレイヤーが行動を選んだ後、各プレイヤー i は選ばれた行動に従って利得 $f_i(a,k)$ を獲得する。

このゲームを非協力が観察される n 人囚人のジレンマと呼びΓで表す。このゲームの表す状況は、協力は目立たないが非協力は目立ち、非協力を選択するとそれが他のプレイヤーに知られてしまう状況である。そのような状況の例としては、学生寮の共用の台所の使用を考えることができる。共用の台所を使うときに、「使った後、もと通りに清潔にしてそこを立ち去る」を協力、「使った後、そのまま汚れた状態にしてそこを立ち去る」を非協力とすると、行動の順序がランダムに決まり、誰かが非協力を採ればそれが次の人に分かり、協力を採ればそれが分からない。そこで、これは非協力が観察される n 人囚人のジレンマと考えることができる。このように、多人数による公共の施設の使用は、多くの場合Γの例と考えられる。

Γについて以下のように定義する。各プレイヤーについて、（純粋）戦略を $ab(a,b\in\{C,D\})$ で表す。ただし、a は彼の手番以前にどのプレイヤーも D を採らなかったときに採る行動、b は彼の手番以前に少なくとも１人が D を採ったときに採る行動とする。戦略の集合を S_i で表す。各プレイヤーは、４つの戦略 CC、CD、DC、DD を持つので、$S_i=\{CC,CD,DC,DD\}$ である。プレイヤー１からプレイヤー n の戦略を並べたもの $(s_1,\ldots,s_n)$ を戦略プロファイルと呼ぶ。任意の戦略プロファイル s において、$u_i(s)$ により s におけるプレイヤー i の期待利得を表す。戦略プロファイル s が、すべての $i\in N$ と $s_i'\in S_i$ について $u_i(s)\geq u_i(s_i',s_{-i})$ を満たすとき、s はナッシュ均衡であると定義される。ここで、任意の戦略プロファイル s において、s_{-i} は s の中でプレイヤー i 以外のプレイヤーの戦略の組を表す。また、戦略 s_i と s_i' において、(1) 任意の $s_{-i}\in\prod_{j\neq i}S_j$ について $u_i(s_i,s_{-i})\geq u_i(s_i',s_{-i})$ が成り立ち、かつ(2) ある $s_{-i}\in\prod_{j\neq i}S_j$ において $u_i(s_i,s_{-i})>u_i(s_i',s_{-i})$ が成り立つと

き、s_i は s_i' を弱く支配するという。

Nishihara（1997）は、以下の結果を得た。

結果 1．すべてのプレイヤーにおいて、*CD* は *CC* を弱く支配し、*DD* は *DC* を弱く支配する。

結果 2．利得関数について、

$$\text{すべての } i \in N \text{ について} \qquad f_i(C,n-1) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_i(D,k) \qquad \text{(c1)}$$

が成り立つならば、（*CD*,... *CD*）はナッシュ均衡であり、この均衡のもとでは全てのプレイヤーが *C* をプレイする[2]。

次のような利得関数を並行型線形利得関数と呼ぶ。

$$f(C,k) = \alpha k\,, \quad f(D,k) = \alpha k + \beta\,. \ (\alpha, \beta > 0,\ (n-1)\alpha > \beta) \qquad (1)$$

この利得関数について西原（2007）は以下の結果を得ている。

結果 3：プレイヤー全員が共通の並行型線形利得関数を持つならば、ナッシュ均衡は *CD* と *CC* の組み合わせと（*DD*,...,*DD*）の 2 種類しか存在しない。

---

[2] 不等式（c1）の左辺は（*CD*,...,*CD*）におけるプレイヤー *i* 利得（全員が *C* を採るときの利得）を表す。右辺は（*CD*,...*CD*）においてプレイヤー *i* が *CD* の代わりに *DD* または *DC* を採るとき、彼の前のプレイヤー（彼の手番が 1 番めであれば 0 人、2 番目であれば 1 人,...，*n* 番目であれば *n*－1 人）が *C* を採ることから期待利得を求めたものである。よってこの不等式がナッシュ均衡の均衡条件となる。

結果１は CC と DC が弱支配される戦略であり重要性が低いことを示している。結果２では、（CD,...,CD）がナッシュ均衡となる条件が明らかにされている。しかし、これが唯一のナッシュ均衡であるわけではない。実際、（DD,...,DD）は利得に無条件にナッシュ均衡となる。結果３では利得関数の制限のもとでナッシュ均衡を絞り込んでいるが、依然として（DD,...,DD）は排除できていない。

（DD,...,DD）が利得に無条件に常にナッシュ均衡であるのは、n 人囚人のジレンマにおいては他者が協力するつもりがなければ非協力が最適な選択であるからである。この点について見れば、この均衡は頑健である。しかしながら、この均衡における利得は（CD,...,CD）の利得よりも低い。したがってプレイヤーが長期的な試行錯誤的学習を行うときには（DD,...,DD）が排除され（CD,...,CD）が選ばれる可能性がある。そこで本稿では内省的（introspective）考察から離れ、進化ゲームの枠組みによる均衡選択を考え、（DD,..., DD）が排除されるか否か、またそのための条件について検討する。

進化ゲームによる分析にあたり、戦略として重要性の低い CC と DC は考察の対象からはずすことにする。これは分析を簡明にするためである。さらに分析を容易にするためにプレイヤー全員が同一の並行型線形利得関数を持つと仮定する。この利得関数の仮定のもとで CD と DD のみを戦略と考えるゲームを $\hat{\Gamma}$ で表す。$\hat{\Gamma}$ において戦略プロファイル s におけるプレイヤー i の利得を $U(s_i,k)$ で表す。ここで k は s においてプレイヤー i 以外のプレイヤーの中で CD をとっている人数を表す。利得関数は各プレイヤーに共通であるから特定のプレイヤーの利得関数の値は（s_i,k）にのみ依存する。そのため、関数 $U(s_i,k)$ は全てのプレイヤーに共通の関数となることに注意せよ。

2. 3. KMR 進化ゲーム

Kandori, Mailath and Rob（1993）によって提案された進化ゲームを $\hat{\Gamma}$ について定式化すると以下のようになる。期 $t=1,2,...$ を考える。各期において、m 人（m は n の倍数）のプレイヤーがランダムにマッチングして n 人ずつのグループを作り $\hat{\Gamma}$ をプレイする。各期首において各プレイヤーは *CD* か *DD* を選択する。以下では、$\hat{\Gamma}$ の戦略プロファイルにおいて *CD* をとるプレイヤーを *CD* プレイヤー、*DD* をとるプレイヤーを *DD* プレイヤーと呼ぶ。第 t 期の *CD* プレイヤーの数を z_t で表し状態と呼ぶ。状態の空間は $Z=\{0,1,2,...,m\}$ である。状態 z における *CD* プレイヤーの期待利得を $\pi_{CD}(z)$ で、*DD* プレイヤーの期待利得を $\pi_{DD}(z)$ で表す。さらに

$$\pi_{dif.}(z)=\pi_{CD}(z)-\pi_{DD}(z)$$

と定義する。

各プレイヤーは、他のプレイヤーの期待利得を観察できるとし、それと現在採っている戦略における自分自身の期待利得を比較して、次の期に最適反応へ戦略を変更するとする。ただし、ある期の状態 z において、戦略 s を採っているプレイヤーが次の期に最適反応へ戦略を変更する確率 $\eta(z,s)$ は次の仮定を満たす。

仮定 1 ： $\pi_s(z)>\pi_{s'}(z)$ ならば $\eta(z,s')>\eta(z,s)=0$

この仮定は、期待利得の小さい戦略を採っているプレイヤーは、一定の確率で戦略の変更を行おうとすることを意味する。

各期において各プレイヤーは確率 $\varepsilon>0$ でこの社会から離れ新たなプレイヤーに置き換えられる。新しいプレイヤーは、p_{CD} の確率で *CD* を $1-p_{CD}$ の確率で *DD* を採るとする。

以上の設定のもとで、状態の推移は有限の状態空間 Z 上のマルコフチェーンとなる。推移確率を $\Pr(z_{t+1}=z' \mid z_t=z)=p_{zz'}(\varepsilon)$ と表す。$p_{zz'}(\varepsilon)$ を要素とする推移確率行列を $P(\varepsilon)$ で表す。

定義 1． Z 上の確率分布 $\mu(\varepsilon)$ が $\mu(\varepsilon)P(\varepsilon)=\mu(\varepsilon)$ を満たすとき、$\mu(\varepsilon)$ を定常分布と呼ぶ[3]。

定義 2． $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon)=\mu^*$ を極限分布と呼ぶ。極限分布のサポートに入る状態を長期状態と呼ぶ[4]。

定義 3． 状態の集合 $A\subseteq Z$ が以下の 2 つの条件（ i ）、（ ii ）を満たすとき極限集合と呼ぶ。

（ i ） $P(0)$ において、$\Pr(z_{t+1}\in A \mid z_t\in A)=1$

（ ii ） $P(0)$ において、任意の $z,z'\in A$ についてある $k>0$ が存在して

$$\Pr(z_{t+k}=z' \mid z_t=z)>0$$

極限集合のクラスを Ω で表す。

註 1： 極限分布 μ^* は、次の形に一意に表される。

$$\mu^*=\sum_{A\in\Omega^*} r_A\mu_A$$

ただし、$\Omega^*\subseteq\Omega$、μ_A は極限集合の上の定常分布、$r_A\in(0,1]$ は極限集合 A の尤度を表す。

---

[3] $\varepsilon>0$ のとき、定常分布は一意に定まる。

[4] 極限分布は存在し、$\mu^*P(0)=\mu^*$ が成り立つ。

定義 4． Ω^*の要素を長期均衡と呼ぶ。

KMR 進化ゲームで長期均衡として選択される均衡は、慣習として定着した行動様式と考えることができる。慣習が形成されるとき、始めに人々は一定の行動をある程度の期間採り続ける。しかし、その行動が不利と気づけば、より有利な行動に修正する。また、社会の中では人々の出入りによって、違った行動様式をもつ者の侵入によってこれまでは満足できた行動がそうでなくなることもある。このようにして、十分に長い期間に試行錯誤して定着した行動様式が慣習であると考えることができる。

社会においてある種の協力が慣習として定着している場合はしばしば見うけられる。例えば、公共交通機関において行儀よくすること、公共の場で静粛にすることなど、公共の場での利己的行動の自粛がこれにあたる。全くの他人同士であれば、たとえ利己的な行動しても批判を浴びることはないであろうが、他者が利己的でない限りは、自分から利己的行動は慎むという行動様式が一般に良く見られる。このような行動様式は、上述のゲーム $\hat{\Gamma}$ における *CD* と考えることができる。$\hat{\Gamma}$ について KMR 進化ゲームを定式化することによって、このような協力的な行動様式が慣習として定着することの説明を与えることができるであろう。

極限集合について次の補題が成立する。

補題 1． 状態集合が $Z=\{0,1,...,m\}$ で、ある $\hat{z}$ が存在して $\{\hat{z},\hat{z}+1,...,m\}$ の範囲で $\pi_{dif.}(z)>0$ であるならば、$\{m\}$ は極限集合となる。また、$\{m\}$ 以外に極限集合が存在するならば、それは $\{0,1,...,\hat{z}-1\}$ に含まれなければならない。

Kandori and Rob（1995）は、長期均衡を求めるためのアルゴリズムを示した。その記述のための定義を以下に与える。

まず、2つの状態 z,z' の間の距離を $d(z,z')\equiv|z-z'|$ と定義する。これは、z から z' へ状態が推移するために必要とされる戦略を変更するプレイヤーの数を表す。推移のコストを次のように定義する。

定義5． 2つの状態 z,z' の間の推移コストを $c(z,z')=\min_{z''\in b(z)}|z'-z''|$ と定義する。ただし、$b(z)=\{z'':p_{zz'}(0)>0\}$ である。

ここで $b(z)$ は、第 t 期の状態が z のときに次の第 $t+1$ 期に到達しうる状態の集合である。状態 z において $\pi_{dif.}(z)>0$ であれば、$b(z)=\{z,z+1,...,m\}$ となり、全ての $z'\leq z$ について $c(z,z')=0$ となる。逆に $\pi_{dif.}(z)<0$ であれば $b(z)=\{0,1,...,z\}$ となり、全ての $z'\leq z$ について $c(z,z')=0$ となる。したがって、$\pi_{dif.}(z)>0$ のときは

$$c(z,z')=\begin{cases}0 & z'\geq z \text{ のとき、}\\ z-z' & z'<z \text{ のとき}\end{cases}$$

となる。$\pi_{dif.}(z)<0$ のときは

$$c(z,z')=\begin{cases}0 & z'\leq z \text{ のとき、}\\ z-z' & z'>z \text{ のとき}\end{cases}$$

となる。2つの極限集合 A と A' の間の推移コストを次のように定義する。

$$C(A,A')=\min_{z\in A,z'\in A'}\min_{g\in G'(z,z')}N(g).$$

ただし、$G'(z,z')$ は、状態の列 $(z^1,z^2,...,z^T)$ で $z^1\in A$、$z^T\in A'$、$0<z^t<n$ $(t=2,...,T-1)$ は他の極限集合 $A''(\neq A,A')$ に含まれないものの全体である。$g\in G'(z,z')$ に対して $N(g)=\sum_{t=1}^{T-1}c(z^t,z^{t+1})$ と定義する。

Kandori and Rob（1995）は、次の命題を導いた。

命題１．長期均衡の集合は、$\min_{A\in\Omega}\min_{h\in H_A}\sum_{(A',A'')\in h}C(A',A'')$ の解によって与えられる。ただし、H_A は A-ツリー（すべての極限集合をノードとし、方向つきの枝からなる樹形図で、A 以外のノードには後ろのノードが存在するもの）である。

この命題から次の補題を得る。

補題２．状態集合が $Z=\{0,1,...,m\}$ で、$z\geq[m/2]$ について $\pi_{dif.}(z)>0$ であれば、$\{m\}$ は唯一の長期均衡である[5]。

補題２の結果を用いて、以下の２節で $n=2$ の場合と $n\geq3$ の場合に分けて（$CD,...,CD$）が長期均衡となるための条件を求めよう。

３．分析Ⅰ：$n=2$ の場合

$n=2$ のとき並行型線形利得関数の利得は以下のように表わせる。

$$f(C,0)=0,\quad f(C,1)=\alpha,$$
$$f(D,0)=\beta,\quad f(D,1)=\alpha+\beta.\ (\text{ただし、}\ \alpha>\beta>0).$$

これより、$\hat{\Gamma}$ における利得は次のように計算される。

$$U(CD,1)=\alpha,\quad U(CD,0)=\beta/2,$$
$$U(DD,1)=\alpha/2+\beta,\quad U(DD,0)=\beta.$$

（CD,CD）がナッシュ均衡となるために、以下では $\alpha/2>\beta$ と仮定する。$n=2$ より

[5] ［　］はガウス記号で、実数 x に対して［x］は x を超えない最大の整数を表す。

$$\pi_{CD}(z)=\frac{z-1}{m-1}U(CD,1)+\frac{m-z}{m-1}U(CD,0)$$
$$=\frac{1}{m-1}\{(\alpha-\frac{\beta}{2})z-\alpha+\frac{\beta m}{2}\},$$
$$\pi_{DD}(z)=\frac{z}{m-1}U(DD,1)+\frac{m-z-1}{m-1}U(DD,0)$$
$$=\frac{1}{m-1}\{\frac{\alpha}{2}z+\beta(m-1)\},$$

したがって

$$\pi_{dif.}(z)=\frac{1}{m-1}\{(\alpha-\frac{\beta}{2})z-\alpha+\frac{\beta m}{2}\}-\frac{1}{m-1}\{\frac{\alpha}{2}z+\beta(m-1)\}$$
$$=\frac{1}{m-1}\{\frac{\alpha-\beta}{2}z-\frac{\beta m}{2}-(\alpha-\beta)\}$$

が得られる。ここで、$\alpha/2>\beta$ の仮定から、$\pi_{dif.}(0)=-\frac{\beta m}{2}-(\alpha-\beta)<0$,

$\frac{\alpha-\beta}{2}>0$ に注意せよ。$\pi_{dif.}(z)$ は線形関数だから、補題 2 より $\pi_{dif.}([m/2])>0$ であることが $\{m\}$ が長期均衡であるための十分条件となる。なお、いま $n=2$ で m は n の倍数と仮定されるから、$[m/2]=m/2$ である。

$$\pi_{dif.}(m/2)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{m-1}\{(\alpha-\frac{\beta}{2})\frac{m}{2}-\alpha+\frac{\beta m}{2}\}>\frac{1}{m-1}\{\frac{\alpha}{2}\frac{m}{2}+\beta(m-1)\}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-3\beta)m>4(\alpha-\beta).$$

$\alpha/2>\beta$ の仮定から最後の不等式の右辺は正だから、この不等式が成り立つためには少なくとも $\alpha>3\beta$ でなければならない。さらにその条件が成り立つときに、$m>\frac{4(\alpha-\beta)}{\alpha-3\beta}$ であるときにこの不等式が成り立つ。こうして次の定理を得る。

定理A． $n=2$ の場合、$\alpha>3\beta$ かつ $m>\dfrac{4(\alpha-\beta)}{\alpha-3\beta}$ が成り立つとき、$\{m\}$ は唯一の長期均衡となる。

この定理では、$\{m\}$ が長期均衡となるためには、α に比べて β（非協力の利益）が十分に小さく m が十分大きくなければならないことを示している。α、β について囚人のジレンマとなる条件は $\alpha>\beta$ であり、(CD,CD) がナッシュ均衡となるための条件は $\alpha/2>\beta$ であった。上の条件は β がさらに小さな値であることを求めている。また、第2の条件は $\{m\}$ が長期均衡となるためにはプレイヤーの集団が十分に大きくなければならないことを述べている。特に第1の条件が余裕を持って満たされない場合は、プレイヤーの集団は非常に大きくなければならない。

数値例1：次のような囚人のジレンマを考える。

		プレイヤー2	
		C	D
プレイヤー1	C	1, 1	0, $1+\beta$
	D	$1+\beta$, 0	β, β

（ただし，$0<\beta<1$）

このゲームの利得は、$\alpha=1$ として(1)の並行型線形利得関数として表すことができる。$\beta=0.1,\ 0.2,\ 0.3$ における $\dfrac{4(\alpha-\beta)}{\alpha-3\beta}$ の値は、それぞれ 5.14, 8, 28 である。よって、それぞれ、$m=6,\ 10,\ 30$（人）以上のプレイヤーにおいて、非協力戦略 DD は淘汰され全員が CD を採る状況が長期均衡となる。

4．分析Ⅱ：$n \geq 3$ の場合

本節では $n \geq 3$ の場合を扱うが、前節の $n=2$ との大きな違いは $\pi_{dif.}(z)$ のグラフの概形を明らかにすることが難しいことである。まず、この関数がどのように表されるかを見てみよう。

状態 z において 1 人の *CD* プレイヤーがマッチングによって $n-1$ 人のプレイヤーと出会うとき、その中の *CD* プレイヤーの人数を確率変数 X_{CD} で表すと、X_{CD} の確率分布は超幾何分布 $H(z-1,n-1,m-1)$ となる。1 人の *DD* プレイヤーがマッチングによって $n-1$ 人のプレイヤーと出会うとき、その中の *CD* プレイヤーの人数を X_{DD} で表すと X_{DD} の確率分布は超幾何分布 $H(z,n-1,m-1)$ となる。そこで、$\pi_{CD}(z)$ と $\pi_{DD}(z)$ は以下のように与えられる。

$$\pi_{CD}(z)=\sum_{x=0}^{n-1} h(x:z-1,m-1)U(CD,x),$$

$$\pi_{DD}(z)=\sum_{x=0}^{n-1} h(x:z,m-1)U(DD,x).$$

ただし、$h(x:z,m-1)$ は、超幾何分布 $H(z,n-1,m-1)$ の確率関数で、次のように表される[6]。

$$h(x:z,m-1)=\frac{\binom{z}{x}\binom{m-z-1}{n-x-1}}{\binom{m-1}{n-1}}.$$

ここで、関数 $\pi_{dif.}(z)=\pi_{CD}(z)-\pi_{DD}(z)$ が増加関数であることが示されれば、補題 1 によって $\{m\}$ が長期均衡となるための条件を与えることがで

[6] 超幾何分布 $H(n-1,z,m-1)$ の確率関数であるので、$h(x:n-1,z,m-1)$ と表すべきであるが、見易さのために $h(x:z,m-1)$ と表記する。同様に 2 項分布 $B(n-1,p)$ の確率関数を $b(x:p)$ と表記する。

きる。しかしながらこれは容易でない。そこで、以下では、

$$U_{dif.}(k) = U(CD,k) - U(DD,k)$$

$$E_{dif.}(p) = E_{B(n-1,\,p)}(U_{dif.}(X))$$

と定義し[7]、$E_{dif.}(z/m)$ によって $\pi_{dif.}(z)$ を近似することを考える。$\pi_{CD}(z)$ と $\pi_{DD}(z)$ を定義するための超幾何分布 $H(z,n-1,m-1)$ と $H(n-1,z-1,m-1)$ は、どちらも $z/m=p$ を保って m と z が非常に大きくなると、2 項分布 $B(n-1,p)$ に収斂する。そのときの戦略 CD、DD における期待利得の差を表すのが $E_{dif.}(p)$ である。

以下の 4 つの補題が成り立つ。特に補題 3 は、本稿の展開において最も重要な役割を果たす命題である。

補題 3． $U_{dif.}(k)$ は k の凸増加関数である。

補題 4． $E_{dif.}(p)$ は p の増加関数である。

次の補題のために $g(\delta,n) = \dfrac{2^n n^2}{\delta}\{\alpha(n-1)+\beta\} + n^2$ と定義する。

補題 5． 任意の $\delta > 0$ について、$m > g(\delta, n)$ かつ $z > n$ であれば $|\pi_{dif.}(z) - E_{dif.}(z/m)| < \delta$ が成り立つ。

補題 6． 任意の $\delta > 0$ について、$m > \dfrac{2^{n-2}}{\delta}((n-1)\alpha+\beta)$ であれば $|E_{dif.}(\dfrac{[m/2]}{m}) - E_{dif.}(1/2)| < \delta$ が成り立つ。

---

[7] $E_{B(n-1,p)}(.)$ は、2 項分布 $B(n-1,p)$ に従う確率変数 X による期待値を取る操作を表す。

以上の補題３から補題６により次の命題を得る。

定理Ｂ． $n \geq 3$ 場合、ある δ（>0）が存在して、$m > g(\delta, n)$ かつ

$U_{dif.}([\frac{n-1}{2}]) \geq 2\delta$ であれば、$\{m\}$ は唯一の長期均衡となる。

ここで、条件 $U_{dif.}([\frac{n-1}{2}])$ をより明確に表すために、プレイヤー i 以外の k 人が CD を採る場合を考え、$U_{dif.}(k)$ の関数形を明らかにしよう。$U(CD, k)$ と $U(DD, k)$ の差をとらえるためにプレイヤーの並びについて考える。CD を採るプレイヤーを CD プレイヤー、DD を採るプレイヤーを DD プレイヤーと呼ぶ。プレイヤー i の前に少なくとも１人の DD プレイヤーがいるならば、プレイヤー i が CD、DD のいずれを採ろうとも彼は行動 D を採ることになるので、CD を採るときと DD を採るときの間に彼の利得の差はない。CD を採るときと DD を採るときの間で彼のプレイに違いが生じるのは、彼の前の全員が CD をとるときである。プレイヤー i の前に CD プレイヤーが l_1 人おり、プレイヤー i の後に DD を採るプレイヤーまでの間に CD プレイヤーが l_2 人いるとする。（図１参照）、

図１　プレイヤー i のプレイに違いが生じる場合

$$\underbrace{CD....CD}_{l_1}(i)\underbrace{CD....CD}_{l_2}DD....$$

ここで、プレイヤー i が CD を採るなら彼の利得は $\alpha(l_1+l_2)$ であり、DD を採るならば彼の利得は $\alpha l_1+\beta$ である。よって、彼が DD をとるよりも CD をとることによる利得の増分は、$\alpha l_2-\beta$ である。この期待値が $U_{dif.}(k)$ である。より正確に言えば、プレイヤー i と彼の後に始めて現れる DD プレイヤーの間のプレイヤーの数を確率変数 $Y(k)$ で表し、プレイヤー i の前に

DD プレイヤーが１人もいない事象を E_0、その確率を $p_0(k)$ で表す。事象 E_0 が生起している条件のもとでの $Y(k)$ の条件付き期待値を $E_{Y|E0}(k)$ と表すと次の補題が成り立つ。

補題７． 任意の $k=0,1,2,...,n-1$ について $U_{dif.}(k)=p_0(k)\{\alpha E_{Y|E0}(k)-\beta\}$ と表せる。

この補題と定理 B より、次の命題を得る。

命題２． $n\geq 3$ の場合、ある δ（>0）が存在して、$m>g(\delta,n)$ かつ $k=[\frac{n-1}{2}]$ について $p_0(k)\{\alpha E_{Y|E0}(k)-\beta\}\geq 2\delta$ であれば、$\{m\}$ は唯一の長期均衡となる。

この命題の条件において $g(\delta,n)=\frac{2^n n^2}{\delta}\{\alpha(n-1)+\beta\}+n^2$ から、$m>g(\delta,n)$）は、プレイヤーの母集団 m が十分に大きいこと、あるいは、プレイヤー数 n が十分に小さいことを意味する。条件 $p_0(k)\{\alpha E_{Y|E0}(k)-\beta\}>2\delta$ は、非協力のインセンティブ β が α に比べて十分に小さいことを意味する。

数値例２： $n=3,4,...,10$、$k=[\frac{n-1}{2}]$ について $\Pr(E_0 \& Y(k)=t)$、$p_0(k)$ と $E_{Y|E0}(k)$ を求めると次のようになる。

表1 $P(E_0 \& Y([\frac{n-1}{2}]=t)$ **と** $p_0([\frac{n-1}{2}])$ **および** $E_{Y|E_0}([\frac{n-1}{2}])$

n	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$p_0([\frac{n-1}{2}])$	$E_{Y\|E_0}([\frac{n-1}{2}])$
3	0.333333	0.166667	0	0	0	0	0.5	0.3333335
4	0.25	0.1666	0.083	0	0	0	0.4996	0.6657326
5	0.2	0.1	0.0333	0	0	0	0.3333	0.49985
6	0.166667	0.1	0.05	0.016666	0	0	0.333333	0.7499956
7	0.242857	0.071429	0.028571	0.007143	0	0	0.35	0.4285715
8	0.125	0.071429	0.035714	0.014286	0.003571	0	0.25	0.8
9	0.111111	0.055556	0.02381	0.007937	0.001587	0	0.2	0.6666668
10	0.1	0.055556	0.027777	0.011905	0.003968	0.000794	0.199999	0.8333291

(1) $n=4$、$\alpha=1$、$\beta=0.1$ の場合を考える。上の表から $p_0([\frac{n-1}{2}])=0.5$, $E_{Y|E_0}([\frac{n-1}{2}])=0.66$. よって、$p_0([\frac{n-1}{2}])\{\alpha E_{Y|E_0}([\frac{n-1}{2}])-\beta\}\geq 2\delta$ となるためには、$\delta\leq 0.14$ でなければならない。$\delta=0.14$ とすると、

$$g(0.14,4)=\frac{n^2 2^n}{\delta}\{\alpha(n-1)+\beta\}+n^2=\frac{4^2 2^4}{0.14}\cdot 3.1+16=5684.57.$$

よって、$m\geq 5685$ であれば、$\{m\}$ が唯一の長期均衡になる。

(2) $n=6$、$\alpha=1$、$\beta=0.1$ の場合を考える。上の表から $p_0([\frac{n-1}{2}])=0.33$, $E_{Y|E0}([(n-1)/2])=0.75$. よって、$p_0([\frac{n-1}{2}])\{\alpha E_{Y|E_0}([\frac{n-1}{2}])-\beta\}\geq 2\delta$ となるためには、$\delta\leq 0.10725$ でなければならない。$\delta=0.1$ とすると、

$$g(0.1,8)=\frac{n^2 2^n}{\delta}\{\alpha(n-1)+\beta\}+n^2=\frac{6^2 2^6}{0.1}\cdot 5.1+36=117540.$$

よって、$m>11$万7540であれば、$\{m\}$ が唯一の長期均衡になる。

4．結句

本稿の分析によって、n 人囚人のジレンマの利得構造のもとであっても、協力が目立たず非協力行動が目立つ状況であれば、社会の成員の試行錯誤的学習過程によって協力均衡が選ばれ非協力が排除される可能性があることが示された。これには、社会（プレイヤーのマッチングする母集団）が十分大きく、行動 D をとるインセンティブが十分に小さいことが要件とされる。数値例から見れば、特に $n=2$ の場合は、CD が長期均衡となって社会的ジレンマが回避される可能性が十分にある。一般の n においては、CD が長期均衡となるためには、社会が非常に大きくなければならない。しかしながら、この社会の大きさは、超幾何分布が 2 項分布に十分に近似されるために必要とされる。そのため近似の評価がより厳密に行われればより小さな数に置き換えられる可能性がある。$n \geq 3$ の場合については、より精密な分析が行われることが期待される。

本稿の結果は、社会的ジレンマの生起にあたり利得構造だけでなくゲームが進行する間にプレイヤーが受け取る情報も重要な要素であること示唆している。社会的ジレンマ問題の考察するにあたってはプレイヤー間の相互の行動の観察可能性についても注意が向けられるべきである。

付録 A

付録は A、B、C の 3 部に分かれる。この付録 A では、本文中に示した補題と命題の証明を与える。それらの証明のいくつかは、別の補題を必要とするが、それらの補題とその証明を付録 B に与える。さらに付録 B の証明に必要な補題とその証明を付録 C に与える。

補題 1 の証明. $\pi_{dif.}(m)>0$ より $z=m$ における最適反応は *CD* だから、$\Pr(z(t+1)=m \mid z(t)=m)=1$ が成り立つ。よって、定義 3 より $\{m\}$ は極限集合となる。次に $A \neq \{m\}$ が極限集合であれば、$A \subseteq \{z : z<\hat{z}\}$ でなければならないことを示そう。仮定より、$\hat{z} \leq z \leq m$ である z において最適反応は *CD* であるから、$\Pr(z(t+1)=z' \mid z(t)=z)>0$ となるのは $z' \geq z$ である z' のみである。したがって、A が、$z<z'$ かつ $z' \geq \hat{z}$ である 2 つの状態 z, z' を含めば、定義 3 の(ii)が満たされないので、極限集合 A がこれらの 2 つの状態を含むことはない。よって、A は、$A \subseteq \{z : z<\hat{z}\}$ でなければならない。■

補題 2 の証明. 補題 1 より、$\{m\}$ は極限集合である。 $\min_{h \in H_{\{m\}}} \sum_{(A', A'') \in h} C(A', A'')$ を考えよう。補題 1 より、$\{m\}$ 以外の極限集合は存在するなら $\{z : z<[m/2]\}$ に含まれなければならない。よって、$\{m\}$ 以外の任意の極限集合 A について状態の列 $(z^1, [m/2], m)$ $(z^1 \in A)$ を考えると、$c(z^1, [m/2]) \leq [m/2]$, $c([m/2], m)=0$ （補題の仮定より $z \geq [m/2]$ における最適反応は *CD* だから）より、$N(g)=c(z^1, z^2) \leq [m/2]$ である。よって、

$$\min_{h \in H_{\{m\}}} \sum_{(A', A'') \in h} C(A', A'') \leq [m/2].$$

次に、$\{m\}$ 以外の任意の極限集合 A について、 $\min_{h \in H_A} \sum_{(A', A'') \in h} C(A', A'')$ を考えよう。H_A はすべての極限集合をノードとするので、$\{m\}$ もノードとしなければならない。$\{m\}$ 以外の極限集合は $\{z : z<[m/2]\}$ に含まれなければならないから、$\{m\}$ 以外の任意の極限集合 A について、状態の列 $(z^1, z^2, ..., z^T)$ で、$z^1=m$、$z^T \in A$ を満たすものは、$N(g) \geq [m/2]+1$ である。なぜなら、$z^2 \leq [m/2]-1$ のときは $c(z^1, z^2)=[m/2]+1$ であり、$z^2 \geq [m/2]$ かつ $z^3 \leq [m/2]-1$ のときは $c(z^1, z^2)+c(z^2, z^3)=[m/2]+1$ であり、一般に、$z^2, z^2, ..., z^{k-1} \geq [m/2]$, $z^k \leq [m/2]-1$ のとき $c(z^1, z^2)+...+c(z^{k-1}, z^k)=[m/2]+1$ だからである（補題の仮定より $z \geq [m/2]$ における最適反応は *CD* である）。よって、

$$\min_{A\in\Omega}\min_{h\in H_A}\sum_{(A',A'')\in h} C(A',A'')$$

の解は $A=\{m\}$ であり、命題 1 から $\{m\}$ が唯一の長期均衡となる。■

補題 3 の証明. プレイヤーを任意に 1 人固定し、プレイヤー i と呼ぶ。$U_{dif.}(x)=U(CD,x)-U(DD,x)$ は、プレイヤー i 以外のプレイヤーの中で x 人が CD を採るとき、プレイヤー i が DD よりも CD を採ることによって得られる期待利得の増分である。この証明の目的は $U_{dif.}(x)$ が凸増加関数であることを示すことであるが、要点は $U_{dif.}(x)$ が凸関数であること、つまり $\Delta U_{dif.}(x)\equiv U_{dif.}(x+1)-U_{dif.}(x)\ (0\leq x\leq n-2)$ が x の増加関数であることを示すことにある[8]。$U_{dif.}(x)$ が増加関数であることは、$\Delta U_{dif.}(0)>0$ であることから示される。以下、証明を 2 部に分けて行う。

第 1 部. この第 1 部では、$\Delta U_{dif.}(x)=U_{dif.}(x+1)-U_{dif.}(x)$ を評価しやすい形に表わして、この関数が増加関数であるための十分条件を明らかにする。

プレイヤー i 以外のプレイヤーの中で 1 人を任意に固定し、プレイヤー j と呼ぶ。プレイヤー i と j 以外のプレイヤーの戦略を任意に固定する。x 人 $(0\leq x\leq n-2)$ を i と j 以外のプレイヤーで CD をとる人数とする。以下では CD をとるプレイヤーを CD プレイヤー、DD をとるプレイヤーを DD プレイヤーと呼ぶ。「プレイヤー j が CD プレイヤーのとき、プレイヤー i が DD よりも CD をとることによる期待利得の増分」と「プレイヤー j が DD プレイヤーのとき、プレイヤー i が DD よりも CD をとることによる期待利得の増分」を比較して、前者の方が後者を上回る大きさが $\Delta U_{dif.}(x)$ の値であることに注意せよ。以下ではこの点に着目して、$\Delta U_{dif.}(x)$ の表現を考え

[8] $\Delta U_{dif.}(x)$ の定義から $x=n-2$ が x の上限、$x=0$ が x の下限となることに注意せよ。

る。

プレイヤーの並び方を以下のタイプ１からタイプ５の５つのタイプに分ける。また、プレイヤーの順序を＜で表し、$i < j$ はプレイヤー i の方がプレイヤー j よりも順序が先であることを表すとする。

プレイヤーの並び方を分類すると以下の５つになる。

タイプ１：$i < j$ で、i の前に少なくとも１人の *DD* プレイヤーがいる。
タイプ２：$i < j$ で、i の前はすべて *CD* プレイヤーで、i と j の間に少なくとも１人の *DD* プレイヤーがいる。
タイプ３：$i < j$ で、j の前の i 以外のプレイヤーはすべて *CD* プレイヤーである。
タイプ４：$j < i$ で、i の前に j 以外で少なくとも１人の *DD* プレイヤーがいる。
タイプ５：$j < i$ で、i の前の j 以外のプレイヤーはすべて *CD* プレイヤーである。

タイプ１と４では、プレイヤー i が *CD* をとるときも *DD* をとるときも、彼は *D* をプレイするので、*DD* よりも *CD* をとることによる利得の増分は０である。これはプレイヤー j が *CD* をとるか *DD* をとるかに無関係である。また、タイプ２では、プレイヤー j は *CD* と *DD* のどちらを採っても結局 *D* をプレイするので、$U_{dif.}(x+1)$ と $U_{dif.}(x)$ の差に影響しない。結局、$U_{dif.}(x+1)$ と $U_{dif.}(x)$ の差に関係するのはタイプ３と５の並び方のみである。

タイプ３で、プレイヤー i の前にいるプレイヤーの数を a_1 人、i と j の間のプレイヤーの数を a_2 人、j と彼の後に最初に来る *DD* プレイヤーとの間にいるプレイヤーの数を a_3 人とする。ただし、プレイヤー j の後が全て *CD* プレイヤーであるときそれらのプレイヤーの数を a_3 とする（図 A1 参照）。

まず、プレイヤー j が CD を採るとする。プレイヤー i が CD をとるときの彼の利得は、$\alpha(a_1+a_2+a_3+1)$ であり、プレイヤー i が DD をとるときの彼の利得は、$\alpha a_1+\beta$ である。よって、利得の増分は $\alpha(m_2+m_3+1)-\beta$ である。

図 A1　タイプ 3 の並び方

$$\underbrace{CD\ldots CD}_{a_1}(i)\underbrace{CD\ldots CD}_{a_2}(j)\underbrace{CD\ldots CD}_{a_3}DD\ldots$$

次に、プレイヤー j が DD を採るとする。このとき、プレイヤー i が CD をとるときの彼の利得は、$\alpha(a_1+a_2)$ であり、プレイヤー i が DD をとるときの彼の利得は、$\alpha a_1+\beta$ である。よって、DD よりも CD を採ることによる利得の増分は $\alpha a_2-\beta$ である。

タイプ 3 の並び方では、プレイヤー i において DD よりも CD を採ることによる利得の増分は、プレイヤー j が CD をとるときの方が DD を採るときよりも $\alpha(a_3+1)$ 大きい。

タイプ 5 で、j の前にいる CD プレイヤーの数を b_1 人、j と i の間のプレイヤーの数を b_2 人、i と彼の後に最初に現れる DD プレイヤーとの間にいるプレイヤーの数を b_3 人とする。ただし、プレイヤー i の後のプレイヤーが全て CD プレイヤーであるときはそれらのプレイヤーの数を b_3 とする（図 A2 参照）。タイプ 3 における議論と同様にして、まず、プレイヤー j が CD を採るとき、プレイヤー i が DD よりも CD を採ることによる利得の増分は $\alpha a_3-\beta$ であることが示せる。プレイヤー j が DD を採る場合、プレイヤー i が CD と DD のどちらを採っても D をプレイするので利得の差は 0 である。よって、タイプ 5 の並び方では、プレイヤー i において DD よりも CD を採ることによる利得の増分は、プレイヤー j が CD をとるときの方が DD を採るときよりも $\alpha b_3-\beta$ 大きい。

図 A2　タイプ 5 の並び方

$$\underbrace{CD....CD}_{n_1}(j)\underbrace{CD....CD}_{n_2}(i)\underbrace{CD...CD}_{n_3}DD....$$

$\Delta U_{dif.}(x)$ を求めよう。上の分析から次の式を得る。

$$\Delta U_{dif.}(x) = U_{dif.}(x+1) - U_{dif.}(x)$$

$$= \frac{1}{n!}\{\sum_{t=0}^{x} \alpha(t+1)\cdot n_3(t,x) + \sum_{t=0}^{x}(\alpha t - \beta)\cdot n_5(t,x)\},$$

ここで $n_3(t)$ は、タイプ 3 で $a_3 = t$ である並び方の数、$n_5(t)$ はタイプ 5 で $b_3 = t$ である並び方の数を表す。a_3 と b_3 は CD プレイヤーの数だから最大でも x であることに注意せよ。タイプ 3 で $a_3 = t$ となる並び方の数はタイプ 5 で $b_3 = t$ となる並び方の数と等しい。なぜならタイプ 3 と 5 の違いはプレイヤー i と j の順番の違いだけだからである。こうして次式を得る。

$$\Delta U_{dif.}(x) = \frac{1}{n!}\{\sum_{t=0}^{x} \alpha(t+1)\cdot n_3(t,x) + \sum_{t=0}^{x}(\alpha t - \beta)\cdot n_3(t,x)\}$$

$$= \frac{1}{n!}\{\sum_{t=0}^{x} 2\alpha t \cdot n_3(t,x) + (\alpha - \beta) n_3(x)\}$$

$$= \frac{1}{n!} n_3(x)\{2\alpha \frac{\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_3(t,x)}{n_3(x)} + (\alpha - \beta)\},$$

ただし n_3 はタイプ 3 の並び方の数である。

$$\xi(x) \equiv \frac{\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_3(t,x)}{n_3(x)}$$

と定義する。上の $\Delta U_{dif.}(x)$ の表現から、この関数は以下の 3 つの条件が成り立つときに増加関数となる。

条件１：$0 \leq x \leq n-2$ の範囲において $\xi(x)$ が x の増加関数。

条件２：$0 \leq x \leq n-2$ の範囲において $n_3(x)$ が x の増加関数。

条件３：$\Delta U_{dif.}(0) > 0$.

第２部. ここでは、$0 \leq x \leq n-2$ の範囲において条件１、２、３が成り立つことを示す。

まず、条件１：$\xi(x+1) - \xi(x) > 0$（$0 \leq x \leq n-3$）を示そう。プレイヤー i、j 以外のプレイヤーの中から１人を任意に固定し、プレイヤー k と呼ぶ。プレイヤー i、j、k 以外のプレイヤーの戦略を任意に固定し、彼ら中で *CD* をとるプレイヤーの数を x で表す。（$x = n-3$ のときは、*DD* プレイヤーが１人もいないことに注意せよ）。証明の概略は以下の通り。

(1) プレイヤー k が *CD* を採るとする。タイプ３の並び方をプレイヤー k の位置によってタイプ 3-A から 3-D に分類し、それを手がかりにして $\xi(x+1)$ を評価する。

(2) プレイヤー k が *DD* を採るとする。上記のタイプ 3-A から 3-D のうち２つのみがタイプ３の並び方に該当する。それを手がかりにして $\xi(x)$ を評価する。

(3) 以上の(3)、(4)の結果から $\xi(x+1) > \xi(x)$ を示す。

プレイヤー k が *CD* を採るとし、k の位置によってタイプ３を以下のタイプ3-1からタイプ3-4に分類する。

タイプ3-1：$k < i < j$.

タイプ3-2：$i < k < j$.

タイプ3-3：$i < j < k$ でプレイヤー j とプレイヤー k の間はすべて *CD* プレイヤー。

タイプ3-4：$i < j < k$ でプレイヤー j とプレイヤー k の間に少なくとも１人の *DD* プレイヤーがいる（$x = n-3$ の場合は、このタイプは存在しない）。

タイプ3-1からタイプ3-4の各タイプの並び方の総数を n_{31}, n_{32}, n_{33}, n_{34} で表す。ここで、タイプ3-1に属する並び方において k と i を入れ替えるとそれはタイプ3-2に属する並び方になり、その逆も成り立つ。よって、$n_{31}=n_{32}$ が成り立つ。同じように、タイプ3-2に属する並び方において k と j を入れ替えると、タイプ3-3に属する並び方になり、またその逆も成り立つ。したがって、$n_{32}=n_{33}$ が成り立つ。こうして $n_{31}=n_{32}=n_{33}$ が成り立つ。

$\xi(x+1)$ を求めよう。タイプ3-1で $a_3=t$ となる並び方の数を $n_{31}(t)$ で表す。同様にタイプ3-2,3-3,3-4について $n_{32}(t)$,$n_{33}(t)$,$n_{34}(t)$ を定義する。次の等式が得られる。

$$\xi(x+1)=\frac{\sum_{t=0}^{x+1} t\cdot n_3(t,x+1)}{n_3(x+1)}$$

$$=\frac{\sum_{l=1}^{4}\sum_{t=0}^{x}(t+1)\cdot n_{3l}(t)}{\sum_{l=1}^{4} n_{3l}}$$

$$=\frac{\sum_{l=1}^{4}\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{3l}(t)}{\sum_{l=1}^{4} n_{3l}}+1.$$

$l=1,..,4$ について $\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{3l}(t)$ と n_{3l} を求めよう。

$x<n-3$ のとき、タイプ3-1の並び方においてプレイヤー j と彼の後に最初に来る DD との間にいる CD プレイヤーの人数が、タイプ３の a_3 に相当する。$x=n-3$ の場合は、j の後のプレイヤーの数がタイプ３の a_3 に相当する。$\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{31}(t)=s_{31}$ と定義する。

図 A3　タイプ3-1の並び方

$$(k)...(i)...(j)\underbrace{CD....CD}_{a_3}DD....$$

$x<n-3$ のとき、タイプ3-2の並び方においてプレイヤー j と最初の *DD* プレイヤーとの間の *CD* プレイヤーの人数が、タイプ３の a_3 に相当する。$x=n-3$ の場合は、j の後のプレイヤーの数がタイプ３の a_3 に相当する。任意の $t=0,...,x$ について $n_{31}(t)=n_{32}(t)$ となる。なぜならば、タイプ3-2における $a_3=t$ となる任意の並び方において、プレイヤー i と k を入れ替えたものがタイプ3-1における $a_3=t$ となる並び方となり、またその逆も成り立つからである。よって、$\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{32}(t)=\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{31}(t)=s_{31}$ を得る。

図 A4　タイプ3-2の並び方

$$(i)...(k)...(j)\underbrace{CD....CD}_{a_3}DD....$$

$x<n-3$ のとき、タイプ3-3の並び方においてプレイヤー j とプレイヤー k の間の *CD* プレイヤーの人数を c_1 とし、プレイヤー k と k の後に最初に出る *DD* プレイヤーとの間にいる *CD* プレイヤーの人数を c_2 とする。$x=n-3$ の場合は、k の後のプレイヤーの数を c_2 とする。タイプ３の並び方の a_3 の値は c_1+c_2+1 となる。

図 A5　タイプ3-3並び方

$$(i)....(j)\underbrace{CD....CD}_{c_1}(k)\underbrace{CD...CD}_{c_2}DD....$$

タイプ3-3において $c_1=t_1$、$c_2=t_2$ となる並び方の数を $n_{33}(t_1,t_2)$ で表す。また、$c_1=t$ となる並び方の総数を $n_{33}^{1}(t)$、$c_2=t$ となる並び方の総数を $n_{33}^{2}(t)$ で表す。このとき、以下の（ｉ）から（ⅳ）が成り立つ。

（ｉ）任意の t_1（$0\le t_1\le x$）について、$\sum_{t_2=0}^{x-t_1} n_{33}(t_1,t_2)=n_{33}^{1}(t_1)$.
（ⅱ）任意の t_2（$0\le t_2\le x$）について、$\sum_{t_1=0}^{x} n_{33}(t_1,t_2)=n_{33}^{2}(t_2)$.

（iii）任意の t（$0 \leq t \leq x$）について $n^2_{33}(t) = n_{31}(t)$.

（iv）任意の t（$0 \leq t \leq x$）について $n^1_{33}(t) = n^2_{33}(t)$.

（v）$\sum_{t_1=0}^{x} t_1 \cdot n^1_{33}(t_1) = s_{31}$ かつ $\sum_{t_2=0}^{x} t_2 \cdot n^2_{33}(t_2) = s_{31}$.

（vi）$\sum_{0 \leq t_1+t_2 \leq x} (t_1 + t_2 + 1) n_{33}(t_1, t_2) = 2s_{31} + n_{31}$.

ここで、（ｉ）と（ii）は、$n_{33}(t_1,t_2)$、$n^1_{33}(t)$、$n^2_{33}(t)$ の定義から明らか。（iii）は、次の理由によって成り立つ。タイプ3-3で $c_2 = t$ となる任意の並び方に対して、プレイヤー i、j、k の呼び名をそれぞれ k、i、j に入れ替えたものは、タイプ3-1の $a_3 = t$ の並び方となり、またその逆も成り立つからである。（iv）が成り立つのは次のような理由による。タイプ3-3となりうるような1つの並び方を考える。いま、$c_1 = t$ であるとすると、同じ t に対し $c_2 = t$ となるようにプレイヤー k を移動することができる。またその逆も成り立つ。よって、タイプ3-3において、$c_1 = t$ となる並び方の数と $c_2 = t$ となる並び方の数は等しくなくてはならない。（v）は、（ii）と（iii）より明らか。（vi）は、次のようにして得られる。

$$\sum_{0 \leq t_1+t_2 \leq x} (t_1 + t_2 + 1) n_{33}(t_1, t_2)$$

$$= \sum_{0 \leq t_1+t_2 \leq x} t_1 n_{33}(t_1, t_2) + \sum_{0 \leq t_1+t_2 \leq x} t_2 n_{33}(t_1, t_2) + \sum_{0 \leq t_1+t_2 \leq x} n_{33}(t_1, t_2)$$

$$= \sum_{t_1=0}^{x} t_1 \sum_{t_2=0}^{x-t_1} n_{33}(t_1, t_2) + \sum_{t_2=0}^{x} t_2 \sum_{t_1=0}^{x-t_2} n_{33}(t_1, t_2) + \sum_{t_2=0}^{x} \sum_{t_1=0}^{x-t_2} n_{33}(t_1, t_2)$$

$$= \sum_{t_1=0}^{x} t_1 n^1_{33}(t_1) + \sum_{t_2=0}^{x} t_2 n^2_{33}(t_2) + \sum_{t_2=0}^{x} n^2_{33}(t_2) \qquad ((\text{ｉ}), (\text{ii}) \text{ より})$$

$$= 2s_{31} + n_{31}. \qquad ((\text{iii}), (\text{iv}) \text{ より})$$

$x < n-3$ のとき、タイプ3-4の並び方においてプレイヤー j と彼の後に最初に来る DD プレイヤーとの間にいる CD プレイヤーの人数が、タイプ3の a_3 に相当する。上述したように、$x = n-3$ の場合はこのタイプは存在しない。

図 A6　タイプ3-4の並び方

$$(i).....(j)\underbrace{CD....CD}_{a_3}DD....(k)...$$

タイプ3-4の中で $a_3=t$ の並び方の総数を $n_{34}(t)$ で表す。ここで、$t=0,...,x$ について $(n-x-3)n_{33}^{1}(t)=n_{34}(t)$ となる。なぜなら、タイプ3-3で $c_1=t$ となる並び方の１つにおいて、プレイヤー k を任意の DD プレイヤーに入れ替えたものがタイプ3-4の $a_3=t$ の１つの並び方となり、いま DD プレイヤーは $n-x-3$ 人いるからである。よって、$(n-x-3)n_{33}^{1}(t)=n_{34}(t)$ を得る。したがって次の２式が成り立つ。

$$n_{34}=(n-x-3)n_{31},\quad \sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{34}(t)=(n-x-3)s_{31}.$$

これらの２式で、$x=n-3$ のときは $n_{34}=0$、$\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{34}(t)=0$ であるが、これは、タイプ3-4の並び方が存在しないことと首尾一貫する。こうして次の２式を得る。

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{4}\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{3l}(t)\\&=\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{31}(t)+\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{32}(t)+\sum_{0\le t_1+t_2\le x}(t_1+t_2+1)n_{33}(t_1,t_2)+\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{34}(t)\\&=s_{31}+s_{31}+2s_{31}+n_{31}+(n-x-3)s_{31}\\&=(n-x+1)s_{31}+n_{31}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{4}n_{3l}&=n_{31}+n_{32}+n_{33}+n_{34}\\&=3n_{31}+(n-x-3)n_{31}=(n-x)n_{31}.\end{aligned}$$

以上により、$\xi(x+1)=\dfrac{\sum_{l=1}^{4}\sum_{t=0}^{x}t\cdot n_{3l}(t)}{\sum_{l=1}^{4}n_{3l}}+1=\dfrac{(n-x+1)s_{31}+n_{31}}{(n-x)n_{31}}+1$ が得られる。

次にプレイヤー k が DD を採るとして $\xi(x)$ を求めよう。上記のタイプ3-1

やタイプ3-2は、プレイヤー i や j の前にプレイヤー k という DD プレイヤーがいるので、タイプ３とならない。プレイヤー k が DD を採るときにタイプ３となるのは、上記のタイプ3-1から3-4の中でタイプ3-3と3-4のみである。

タイプ3-3において、プレイヤー k が DD プレイヤーの場合 c_1 がタイプ３の並び方の a_3 になる。上で $\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_{33}^{1}(t)=s_{31}$ と $\sum_{t=0}^{x} n_{33}^{1}(t)=n_{31}$ を示した。タイプ3-4においては、プレイヤー k が CD プレイヤーであるか DD プレイヤーであるかに a_3 の大きさは無関係である。上で $n_{34}(t)=(n-x-3)n_{31}(t)$ が示された。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{x} t\cdot n_3(t,x) &= \sum_{0\le t_1+t_2\le x} t_1 n_{c_1c_2}(t_1,t_2)+\sum_{t=0}^{x} t n_{34}(t)\\ &= s_{31}+(n-x-3)s_{31}=(n-x-2)s_{31}\\ n_3(x)=n_{33}+n_{34} &= n_{31}+(n-x-3)n_{31}=(n-x-2)n_{31}\end{aligned}$$

が成り立つ。こうして、 $\xi(x)=\dfrac{s_{31}}{n_{31}}$ が得られる。

以上により次が得られる。

$$\begin{aligned}\xi(x+1)>\xi(x) &\Leftrightarrow \frac{(n-x+1)s_{31}+n_{31}}{(n-x)n_{31}}+1>\frac{s_{31}}{n_{31}}\\ &\Leftarrow s_1+n_1>0\,.\end{aligned}$$

最後の不等式は明らかに成り立つから、条件１は成立する。さらに上で得た結果から

$$n_3(x+1)>n_3(x)\Leftrightarrow (n-x)n_{33}>(n-x-2)n_{31}$$

が成り立つ。よって、条件２が成立する。最後に条件３が成り立つことを示そう。定義より

$$\Delta U_{dif.}(0) = U_{dif.}(1) - U_{dif.}(0),$$

$$U_{dif.}(1) = U(CD,1) - U(DD,1),$$

$$U_{dif.}(0) = U(CD,0) - U(DD,0)$$

が成り立つ。まず $U_{dif.}(0)$ を求めよう。明らかに $U(DD,0) = \beta$．また、プレイヤー i が CD プレイヤーの場合、彼が最初の手番の場合のみ彼は C をプレイするので、

$$U(CD,0) = \frac{1}{n} f(C,0) + \frac{n-1}{n} f(D,0) = \frac{n-1}{n}\beta .$$

よって、$U_{dif.}(0) = -\frac{1}{n}\beta$ となる。次に $U_{dif.}(1)$ を求めよう。プレイヤー i が DD をとり、彼以外に 1 人の CD プレイヤーがいる場合、その CD プレイヤーは最初の手番の場合のみ C をプレイするので、プレイヤー i の利得は、

$$U(DD,1) = \frac{1}{n} f(D,1) + \frac{n-1}{n} f(D,0) = \frac{1}{n}(\alpha+\beta) + \frac{n-1}{n}\beta = \frac{1}{n}\alpha + \beta$$

となる。プレイヤー i が CD をとり彼以外に 1 人の CD プレイヤーがいる場合、次のように分類できる。

（ i ）プレイヤー i と CD プレイヤーが最初の 2 つの手番をもつとき、プレイヤー i の利得は $f(C,1) = \alpha$．
（ ii ）CD プレイヤーが先頭で、少なくとも 1 人の DD プレイヤーを挟んでプレイヤー i が手番を持つとき、プレイヤー i の利得は $f(D,1) = \alpha + \beta$．
（iii）プレイヤー i が先頭で、少なくとも 1 人の DD プレイヤーを挟んで CD

プレイヤーが手番を持つとき、プレイヤー i の利得は $f(C,0)=0$.

（iv）上記以外の場合、プレイヤー i の利得は $f(D,0)=\beta$.

プレイヤーの並び方の数は、（ｉ）が $2\cdot(n-2)!$、（ii）と（iii）が $(n-2)\cdot(n-2)!$ である。よって、プレイヤー i の期待利得は、

$$\begin{aligned}U(CD,1)&=\frac{2\cdot(n-2)!}{n!}\alpha+\frac{(n-2)\cdot(n-2)!}{n!}(\alpha+\beta)+\frac{n!-2\cdot(n-2)!-2(n-2)\cdot(n-2)!}{n!}\beta\\&=\frac{2}{n(n-1)}\alpha+\frac{n-2}{n(n-1)}(\alpha+\beta)+\beta-\frac{2}{n}\beta\\&=\frac{2}{n-1}\alpha-\frac{n-2}{n-1}\beta.\end{aligned}$$

したがって、

$$U_{dif.}(1)=\frac{2}{n-1}\alpha+\frac{n-2}{n-1}\beta-(\frac{1}{n}\alpha+\beta)>\frac{1}{n}\alpha-\frac{1}{n-1}\beta.$$

以上により、

$$\begin{aligned}\Delta U_{dif.}(0)&>\frac{1}{n}\alpha-\frac{1}{n-1}\beta+\frac{1}{n}\beta\\&=\frac{1}{n}(\alpha-\frac{1}{n-1}\beta)>0\end{aligned}$$

最後の不等式は、$(n-1)\alpha>\beta$ による。こうして、条件３も成り立つ。

以上により、$x=0,1,...,n-3$ について $\Delta U_{dif.}(x)$ は x の増加関数であることが示された。最後に、上の結果より $\Delta U_{dif.}(0)>0$ であるので、これと $\Delta U_{dif.}(x)$ が x の増加関数であることから $\Delta U_{dif.}(0)>0$ であることが示される。■

補題 4 の証明. $p>p'$ のとき、確率分布 $B(n-1,p)$ は $B(n-1,p')$ に対して第 1 種の確率優位（1st order stochastic dominance）となる。補題 3 より $U_{dif.}(k)$ は増加関数であるから、第 1 種の確率優位の性質によって、$p>p'$ のとき $E_{B(n-1,p)}(U_{dif.}(X))>E_{B(n-1,p')}(U_{dif.}(X))$ となり、$E_{dif.}(p)>E_{dif.}(p')$ が成り立つ。
■

補題 5 の証明.

$$|\pi_{dif.}(z)-E_{B(n-1,z/m)}(U_{dif}(X))|$$

$$\leq|\pi_{CD}(z)-E_{B(n-1,z/m)}(U(CD,X))|+|\pi_{DD}(z)-E_{B(n-1,z/m)}(U(DD,X))|$$

$$\leq\sum_{x=0}^{n-1}|h(x:z-1,m-1)-b(x:z/m)|\cdot|U(CD,x)|$$

$$+\sum_{x=0}^{n-1}|h(x:z,m-1)-b(x:z/m)|\cdot|U(DD,x)|$$

いま、$m>g(\delta,n)$ より $m>n^2$ が成り立ち、$z>n$ が仮定されているので、補題 B1（付録 B 参照）より

$$\leq\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}\frac{n^2}{m-n^2}\cdot|U(CD,x)|+\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}\frac{n^2}{m-n^2}\cdot|U(DD,x)|$$

$$\leq\frac{2n^2}{m-n^2}f(D,n-1)\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}$$

$$=\frac{2^n n^2}{m-n^2}f(D,n-1)\,.$$

よって、$\frac{2^n n^2}{m-n^2}f(D,n-1)<\delta$ であれば、$|\pi_{dif.}(z)-E_{B(n-1,z/m)}[U_{dif.}(X)]|<\delta$ となる。

$$\frac{2^n n^2}{m-n^2} f(D,n-1) < \delta \Leftrightarrow \frac{2^n n^2}{\delta} f(D,n-1) + n^2 < m$$

だから、$f(D,n-1) = \alpha(n-1) + \beta$ より補題は成り立つ。■

補題 6 の証明. m が偶数のとき、$\frac{[m/2]}{m} = \frac{1}{2}$ だから、結論部分は明らか。m が奇数の場合を考える。このとき、$\frac{[m/2]}{m} = \frac{\frac{m-1}{2}}{m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$ であることに注意せよ。まず、補題 4 より、

$$E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m}) - E_{dif.}(1/2) < 0$$

が成り立つ。よって、補題 6 を示すためには、$E_{dif.}(1/2) - E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m}) < \delta$ であることを示せばよい。$p = \frac{[m/2]}{m}$ とおく。$p < 1/2 < 1-p$ だから

$$E_{dif.}(1/2) - E_{dif.}(p) = \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \{(\frac{1}{2})^{n-1} - p^x (1-p)^{n-x-1}\} U_{dif.}(x)$$
$$< \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \{(\frac{1}{2})^{n-1} - p^{n-1}\} \cdot f(D,n-1).$$

$n \geq 3$ のとき関数 $h(x) = x^{n-1}$ は $0 \leq x \leq 1/2$ の範囲で、$h'(x) = (n-1)x^{n-2} \leq 1$ となる。なぜならば、$(n-1)(1/2)^{n-2} \leq 1 \Leftrightarrow n-1 \leq 2^{n-2}$ であるが、最後の不等式は $n=3$ について成り立ち、左辺は 1 次関数、右辺は指数関数だからである。よって、$\frac{1}{2^{n-1}} - p^{n-1} < \frac{1}{2} - p = \frac{1}{2m}$ であるので

$$E_{dif.}(1/2)-E_{dif.}(p)\le\sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}\frac{1}{2m}\cdot f(D,n-1)=\frac{2^{n-2}}{m}\{(n-1)\alpha+\beta\}.$$

補題の仮定から $\frac{2^{n-2}}{m}((n-1)\alpha+\beta)<\delta$ だから、$|E_{dif.}(p)-E_{dif.}(1/2)|<\delta$ が得られる。■

定理 B の証明. ある $\delta>0$ に対して $E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m})>\delta$ が成り立つと仮定しよう。補題 4 より、$E_{dif.}(z/m)$ は z の増加関数であるから、任意の $z\ge[m/2]$ で $E_{dif.}(z/m)>\delta$ となる。いま $m>g(\delta,n)$ から、$z>n$ であれば、補題 5 より $|\pi_{dif.}(z)-E_{dif.}(z/m)|<\delta$ が成り立つ。ここで、$m>g(\delta,n)$ から $m>n^2$ であり、これから $[m/2]>n$ となるから、任意の $z\ge[m/2]$ について $|\pi_{dif.}(z)-E_{dif.}(z/m)|<\delta$ であり、$E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m})>\delta$ から $\pi_{dif.}(z)>0$ が得られる。よって、補題 2 より $\{m\}$ は唯一の長期均衡となる。したがって、命題 2 を証明するためには、$E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m})>\delta$ であることを示せばよい。簡単な計算から $g(\delta,n)>\frac{2^{n-2}}{\delta}\{\alpha(n-1)-\beta\}$ が確かめられるが、これから補題 6 により $|E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m})-E_{dif.}(\frac{1}{2})|<\delta$ が得られる。よって、$E_{dif.}(\frac{1}{2})>2\delta$ であれば、$E_{dif.}(\frac{[m/2]}{m})>\delta$ となる。以下、$E_{dif.}(\frac{1}{2})>2\delta$ であることを示す。

まず、$n-1$ が偶数の場合を考えよう。$E_{dif.}(\frac{1}{2})$ は、次のように表される。

$$E_{dif.}(1/2)=\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x) + b(\frac{n-1}{2}:1/2)U_{dif.}(\frac{n-1}{2})+\sum_{x=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x)\,. \quad \text{(A1)}$$

$B(n-1,1/2)$ の確率分布は、平均＝$\frac{n-1}{2}$ について対称な単峰形であるから、$x=0,1,...,(n-1)/2-1$ について $b(x:1/2)=b(n-1-x:1/2)$ が成り立つ。よって、

$$\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x)+\sum_{x=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x)$$

$$=\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}-1} b(x:1/2)\{U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)\}$$

ここで、$x=0,1,...,\frac{n-1}{2}-1$ について $U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)>4\delta$ を示すことができる。なぜなら $U_{dif.}(x)$ が凸関数であることから、$\frac{1}{2}\{U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)\}>U_{dif.}(\frac{n-1}{2})$ だから

$$U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)\}>2U_{dif.}(\frac{n-1}{2})>4\delta$$

だからである。最後の不等式は、$U_{dif.}(\frac{n-1}{2})>2\delta$ の仮定から成り立つ。したがって、（A1）より

$$E_{dif.}(\frac{1}{2}) > 2\delta \cdot b(\frac{n-1}{2}:1/2) + 4\delta\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}-1} b(x:1/2)$$

$$= 2\delta\{b(\frac{n-1}{2}:1/2) + 2\sum_{x=0}^{\frac{n-1}{2}-1} b(x:1/2)\} = 2\delta$$

が得られる。

次に、$n-1$ が奇数の場合を考えよう。$[\frac{n-1}{2}]=\frac{n}{2}-1$ に注意せよ。$E_{dif.}(\frac{1}{2})$ は、次のように表せる。

$$E_{dif.}(1/2) = \sum_{x=0}^{\frac{n}{2}-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x) + \sum_{x=\frac{n}{2}}^{n-1} b(x:1/2)U_{dif.}(x). \qquad (A2)$$

ここで、仮定より $U_{dif.}(n/2-1)>2\delta$ だが、補題３より $U_{dif.}(k)$ は増加関数なので、

$$U_{dif.}(n/2) > U_{dif.}(n/2-1) > 2\delta \qquad (A3)$$

が成り立つ。$B(1/2,n-1)$ の確率分布は、平均＝$\frac{n-1}{2}$ について対称な単峰形であるから、$x=0,1,...,(n-1)/2-1$ について $b(x:1/2)=b(n-1-x:1/2)$ が成り立つので、

（A2）右辺 $> \sum_{x=0}^{\frac{n}{2}-2} b(x:1/2)\{U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)\} + 2\delta\{b(n/2-1:1/2)+b(n/2:1/2)\}.$

ここで、$x=0,1,...,\frac{n}{2}-2$ について $U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-1-x)>4\delta$ である。なぜなら、$U_{dif.}(x)$ の凸性から

$$U_{dif.}(n-x-1)-U_{dif.}(n/2) > U_{dif.}(n/2-1)-U_{dif.}(x)$$

が成り立つが、これから、

$$U_{dif.}(x)+U_{dif.}(n-x-1)>U_{dif.}(n/2-1)+U_{dif.}(n/2)$$

であるが、（A3）によって右辺$>4\delta$だからである。よって、

$$E_{dif.}(1/2)>4\delta\sum_{x=0}^{n/2-2}b(x:1/2)+2\delta\{b(n/2-1:1/2)+b(n/2:1/2)\}$$

$$=2\delta\sum_{x=0}^{n-1}b(x:1/2)=2\delta$$

を得る。■

命題 2 の証明. $l_2=t$ となる並び方の数を $n_0(t)$、 $\hat{n}_0=\sum_{t=0}^{k}n_0(t)$ と表すと

$$U_{dif.}(k)=\frac{1}{n!}\sum_{t=0}^{k}n_0(t)\{\alpha t+\beta\}=\frac{\hat{n}_0}{n!}\{\alpha\sum_{t=0}^{k}t\frac{n_0(t)}{\hat{n}_0}+\beta\}$$

が得られる。ここで、 $\frac{\hat{n}_0}{n!}=p_0(k)$, $\sum_{t=0}^{k}t\frac{n_0(t)}{\hat{n}_0}=E_{Y|E_0}(k)$ が成り立つことから、命題２より証明は完了する。■

付録 B

補題 B1. $m>z>n$、$m>n^2$ のとき、$l=0,1$、$p=z/m$ について次の不等式が成り立つ。

$$|\,h(x:z-l,m-1)-b(x:p)\,|<\binom{n-1}{x}\frac{n^2}{m-n^2}.$$

証明. $x=0,1,...,n-1$ について

$$h(x:z-l,m-1)=\frac{\binom{z-l}{x}\binom{m-z+l-1}{n-x-1}}{\binom{m-1}{n-1}}$$

$$=\frac{(z-l)(z-l-1)...(z-l-x+1)}{x!}\cdot\frac{(m-z+l-1)(m-z+l-2)...(m-z+l-n+x+1)}{(n-x-1)!}\cdot$$

$$\frac{(n-1)!}{(m-1)(m-2)...(m-n+1)}$$

$$=\binom{n-1}{x}\frac{(z-l)(z-l-1)...(z-l-x+1)}{(m-1)(m-2)...(m-x)}\cdot\frac{(m-z+l-1)(m-z+l-2)...(m-z+l-n+x+1)}{(m-x-1)(m-x-2)...(m-n+1)}$$

$$=\binom{n-1}{x}(\frac{z-l}{m-1}\cdot\frac{z-l-1}{m-2}\cdot...\cdot\frac{z-l-x+1}{m-x})\cdot(\frac{m-z+l-1}{m-x-1}\cdot\frac{m-z+l-2}{m-x-2}\cdot...\cdot\frac{m-z+l-n+x+1}{m-n+1})$$

$$=\binom{n-1}{x}(\prod_{t=0}^{x-1}\frac{z-l-t}{m-t-1})\cdot(\prod_{t=0}^{n-x-2}\frac{m-z+l-t-1}{m-x-t-1}).\qquad\text{(B1)}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{z-l-t}{m-t-1}=\frac{-(m-t-1)+(z-l-t)}{(m-t-1)^2}=\frac{-m+z-l+1}{(m-t-1)^2}\le 0$$

から

$$\min_{t=0,...,x-1}\frac{z-l-t}{m-t-1}=\frac{z-l-x+1}{m-x},$$

$$\max_{t=0,...,x-1}\frac{z-l-t}{m-t-1}=\frac{z-l}{m-1}.$$

また、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{m-z+l-t-1}{m-x-t-1}=\frac{-(m-x-t-1)+(m-z+l-t-1)}{(m-x-t-1)^2}=\frac{x-z+l}{(m-x-t-1)^2}<0$$

から、

$$\min_{t=0,\ldots,n-x-2} \frac{m-z+l-t}{m-x-t} = \frac{m-z+l-n+x+1}{m-n+1},$$

$$\max_{t=0,\ldots,n-x-2} \frac{m-z+l-t}{m-x-t} = \frac{m-z+l}{m-x}$$

を得る。以上により、

$$(\mathrm{B1}) > \binom{n-1}{x}\left(\frac{z-l-x+1}{m-x}\right)^{x} \cdot \left(\frac{m-z+l-n+x+1}{m-n+1}\right)^{n-x-1}, \qquad (\mathrm{B2})$$

$$(\mathrm{B1}) < \binom{n-1}{x}\left(\frac{z-l}{m-1}\right)^{x} \cdot \left(\frac{m-z+l}{m-x}\right)^{n-x-1}. \qquad (\mathrm{B3})$$

第 2 部.

（B2）の右辺について、

$$\frac{z}{m} - \frac{z-l-x+1}{m-x} = \frac{z(m-x)-m(z-l-x+1)}{m(m-x)} = \frac{(m-z)x+m(l-1)}{m(m-x)}$$

が成り立つので、$p = z/m$ から

$$\frac{z-l-x+1}{m-x} = p - \frac{(m-z)x+m(l-1)}{m(m-x)}.$$

また、

$$\frac{m-z}{m}-\frac{m-z-l-n+x+1}{m-n+1}=\frac{(m-z)(m-n+1)-m(m-z-l-n+x+1)}{m(m-n+1)}$$
$$=\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}$$

が成り立つので、$q=(m-z)/m$ から

$$\frac{m-z-n+x+1}{m-n+1}=q-\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}.$$

よって

（B2）右辺

$$=\binom{n-1}{x}(p-\frac{(m-z)x+m(l-1)}{m(m-x)})^x\cdot(q-\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)})^{n-x-1}-\binom{n-1}{x}p^xq^{n-x-1}.$$

補題 C1（付録 C 参照）より、

$$(p-\frac{(m-z)x+m(l-1)}{m(m-x)})^x>p^x-\frac{(m-z)x^2+mx(l-1)}{m(m-x)},$$
$$(q-\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)})^{n-x-1}>q^{n-x-1}-\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}(n-x-1)$$

が成り立つ。よって

$$
\begin{aligned}
&h(x:z-1,m)-b(x:p)\\
&>\binom{n-1}{x}\{p^x-\frac{(m-z)x^2+mx(l-1)}{m(m-x)}\}\cdot\{q^{n-x-1}-\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}(n-x-1)\}\\
&\qquad\qquad -\binom{n-1}{x}p^xq^{n-x-1}\\
&>\binom{n-1}{x}\{-p^x\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}(n-x-1)-\frac{(m-z)x^2+mx(l-1)}{m(m-x)}q^{n-x-1}\}\\
&>-\binom{n-1}{x}\{\frac{m(l-x)+(n-1)z}{m(m-n+1)}(n-x-1)+\frac{(m-z)x^2+mx(l-1)}{m(m-x)}\}
\end{aligned}
$$

｛ ｝内の第１項は x の２次関数（下に凸）で切片が $x=\dfrac{ml+(n-1)z}{m}$、$n-1$ だから、$0\leq x\leq n-1$ より $x=0$ で最大、第２項は x の増加関数であるから $x=n-1$ で最大となるので

$$
\begin{aligned}
&>-\binom{n-1}{x}\{\frac{ml+(n-1)z}{m(m-n+1)}(n-1)+\frac{(m-z)(n-1)+m(l-1)}{m(m-n+1)}(n-1)\}\\
&=-\binom{n-1}{x}\frac{n-1}{m-n+1}\{2(l-1)+n\}\\
&\geq-\binom{n-1}{x}\frac{n(n-1)}{m-n+1}.
\end{aligned}
\qquad \text{(B4)}
$$

最後の不等式は $l\leq 1$ より。

第 3 部.

（B3）より

$$h(x:z-1,m)-b(x:p)$$
$$<\binom{n-1}{x}\left(\frac{z-l}{m-1}\right)^{x}\cdot\left(\frac{m-z+l}{m-x}\right)^{n-x-1}-\binom{n-1}{x}p^{x}q^{n-x-1}. \qquad \text{(B5)}$$

ここで

$$\frac{z-l}{m-1}-\frac{z}{m}=\frac{m(z-l)-(m-1)z}{m(m-1)}=\frac{z-lm}{m(m-1)}$$

であり、$p=z/m$ から、

$$\frac{z-l}{m-1}=p+\frac{z-lm}{m(m-1)}<p+\frac{m}{m(m-1)}=p+\frac{1}{m-1}.$$

さらに

$$\frac{m-z+l}{m-x}-\frac{m-z}{m}=\frac{m(m-z+l)-(m-z)(m-x)}{m(m-x)}=\frac{m(x+l)-zx}{m(m-x)}$$

であり、$q=(m-z)/m$ から

$$\frac{m-z+l}{m-x}=q+\frac{m(x+l)-zx}{m(m-x)}$$

だが、

$$\frac{m(x+l)-zx}{m(m-x)}<\frac{x+l}{m-x}<\frac{n-1+l}{m-n+1}\le\frac{n}{m-n}$$

より、

$$\frac{m-z+l}{m-x} < q + \frac{n}{m-n}.$$

よって

$$\text{（B5）右辺} < \binom{n-1}{x}\{p+\frac{1}{m-1}\}^x \cdot \{q+\frac{n}{m-n}\}^{n-x-1} - \binom{n-1}{x}p^x q^{n-x-1}. \qquad \text{（B6）}$$

ここで補題 C2（付録 C 参照）より

$$(p+\frac{1}{m-1})^x < p^x + \frac{\frac{x}{m-1}}{1-\frac{x}{m-1}}$$

$$= p^x + \frac{x}{m-1-x}$$

$$\le p^x + \frac{n-1}{m-n}.$$

最後の不等式は $x \le n-1$ より。同様に補題 C2 より

$$(q+\frac{n}{m-n})^{n-x-1} < q^{n-x-1} + \frac{\frac{n(n-x-1)}{m-n}}{1-\frac{n(n-x-1)}{m-n}}$$

$$= q^{n-x-1} + \frac{n(n-x-1)}{m-n-n(n-x-1)}$$

$0 \le x$ より

$$\le q^{n-x-1} + \frac{n(n-1)}{m-n-n(n-1)} = q^{n-x-1} + \frac{n(n-1)}{m-n^2}.$$

よって、

$$\begin{aligned}
\text{(B6) 右辺} &< \binom{n-1}{x}\{p^x + \frac{n-1}{m-n}\}\{q^{n-x-1} + \frac{n(n-1)}{m-n^2}\} \quad - \binom{n-1}{x} p^x q^{n-x-1} \\
&= \binom{n-1}{x}\{p^x \frac{n(n-1)}{m-n^2} + \frac{n-1}{m-n} q^{n-x-1} + \frac{n-1}{m-n} \cdot \frac{n(n-1)}{m-n^2}\} \\
&< \binom{n-1}{x}\{\frac{n(n-1)}{m-n^2} + \frac{n-1}{m-n} + \frac{n(n-1)^2}{(m-n)(m-n^2)}\} \\
&= \binom{n-1}{x}\frac{(n-1)\{n(m-n)+(m-n^2)+n(n-1)\}}{(m-n^2)(m-n)}\} \\
&= \binom{n-1}{x}\frac{(n-1)(n+1)}{m-n^2} \\
&= \binom{n-1}{x}\frac{n^2}{m-n^2}. \qquad \text{(B7)}
\end{aligned}$$

第 4 部. 第 2 部（B4）、第 3 部（B7）から、

$$| h(x:n-1,z-1,m-1) - b(x:n-1,p) | < \binom{n-1}{x} \max\{\frac{n(n-1)}{m-n+1}, \frac{n^2}{m-n^2}\}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{m-n+1} < \frac{n^2}{m-n^2} &\Leftrightarrow (n-1)(m-n^2) < n(m-n+1) \\
&\Leftrightarrow mn - n^3 - m + n^2 < mn - n^2 + n \\
&\Leftrightarrow 0 < n^3 - 2n^2 + m + n.
\end{aligned}$$

$n^3-2n^2+n=n(n-1)^2>0$ だから、最後の不等式は必ず成り立つ。こうして次の不等式を得る。

$$| h(x:n-1,z-1,m-1)-b(x:n-1,p) | <\binom{n-1}{x}\frac{n^2}{m-n^2}. \blacksquare$$

付録 C

補題 C1. $1>a>bc>0$、c が正の整数のとき $(a\pm b)^c>a^c\pm bca^{c-1}$（複号同順）が成り立つ。

証明. 2 項定理より

$$(a+b)^c=a^c+bca^{c-1}+\sum_{s=2}^{c}\binom{c}{s}b^s a^{c-s}.$$

仮定より右辺第 3 項>0 だから $(a+b)^c$ について補題は明らか。$(a-b)^c$ の場合を示す。再び 2 項定理より

$$(a-b)^c=a^c+\sum_{s=1}^{c}\binom{c}{s}(-b)^s a^{c-s}.$$

右辺の第 2 項において $s\leq c-1$ について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\binom{c}{s}(-b)^s a^{c-s}+\binom{c}{s+1}(-b)^{s+1}a^{c-s-1}\\&=(-b)^s a^{c-s-1}\{\frac{c!}{s!(c-s)!}x-\frac{c!}{(s+1)!(c-s-1)!}b\}\\&=(-b)^s a^{c-s-1}\frac{c!}{s!(c-s-1)!}\{\frac{a}{c-s}-\frac{b}{s+1}\}.\end{aligned}$$

ここで最終式 ｛ ｝ について

$$\frac{a}{c-s}-\frac{b}{s+1}>0 \Leftrightarrow a(s+1)-b(c-s)>0,$$

であるが、

$$a(s+1)-b(c-s)=(a+b)s+a-bc$$

であり、仮定より $a>bc$ だから最後の不等式は成り立つ。よって s が偶数のとき

$$\binom{c}{s}(-b)^s a^{c-s}+\binom{c}{s+1}(-b)^{s+1}a^{c-s-1}>0$$

が得られる。よって c が奇数のとき

$$(a-b)^c > a^c+\binom{c}{1}(-b)a^{c-1}=a^c-bca^{c-1},$$

となり、c が偶数のとき

$$(a-b)^c > a^c+\binom{c}{1}(-b)a^{c-1}+(-b)^c > a^c-bca^{c-1}.$$

したがって一般の c について

$$(a-b)^c > a^c-bca^{c-1}$$

が成り立つ。■

補題 C2. $1>a$、$bc>0$、c が正の整数のとき $(a+b)^c < a^c+\dfrac{bc}{1-bc}$ が成り立つ。

証明. 2項定理により

$$(a+b)^c = a^c + \sum_{s=1}^{c} \binom{c}{s} b^s a^{c-s}.$$

$$\text{右辺} \ < a^c + \sum_{s=1}^{c} \frac{c(c-1)...(c-s+1)}{s!} b^s$$

$$< a^c + \sum_{s=1}^{c} (bc)^s < a^c + \frac{bc-(bc)^{c+1}}{1-bc} < a^c + \frac{bc}{1-bc}. \quad \blacksquare$$

参考文献

Fudenberg, D. and E. Maskin (1986) “The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information,” *Econometrica* **54**, pp.533-554.

Fudenberg, D., D. Levine, and E. Maskin (1994) “The Folk Theorem with Imperfect Public Information,” *Econometrica* **62**, pp.997-1039.

Kandori, M., G. Mailath, and R. Rob (1993), “Learning, Mutation and Long Run Equilibria in Games,” *Econometrica* **61**, pp.29-56.

Kandori, M. and R. Rob (1995), “Evolution of Equilibria in the Long Run : a General Theory and Applications,” *Journal of Economic theory* **65**, pp.383-414.

Kreps, D., P. Milgrom, J. Roberts and R. Wilson (1982), “Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners’ Dilemma,” *Journal of Economic Theory* **27**, pp.245-252.

Maynard Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge : Cambridge University Press.

Neymann, A. (1999), “Cooperation in Repeated Games When the Number of Stages Is Not Common Knowledge,” *Econometrica* **67**, pp.45-64.

Nishihara, K. (1997) “A Resolution of N-person Prisoners’ Dilemma,” *Economic Theory* **10**, pp.531-540.

———— (1999) “Stability of the Cooperative Equilibrium in N-person Prisoners’ Dilemma with Sequential Moves,” *Economic Theory* **13**, pp.483-494.

西原　宏（2007）“非協力探知型情報構造における N 人囚人のジレンマの解消：線形利得関数のもとでのナッシュ均衡の２極性、横浜経営研究第**28**、pp.89-102。

Okada, A. (1993) “The Possibility of Cooperation in an n-person Prisoners’ Dilemma with Institutional Arrangements,” *Public Choice* **77**, pp.629-656.

van Damme, E. (1987) Stability and Perfection of Nash Equilibria : Springer-Verlag.

Young, P. (1993) “The Evolution of Convention,” *Econometrica* **61**, pp.57-84.