

固定された区間上における ベータ分布の一般化

鍵 原 理 人*

1 序論

有限区間 $(0, 1)$ 上の一様分布は、連続型の確率分布として最も基本的な分布の一つである．有限区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う独立同分布の確率変数列に対して、その順序統計量の分布は同じ区間 $(0, 1)$ 上のベータ分布（第 1 種のベータ分布、以下、適宜に B1 と略記）となり、かつ、B1 は一様分布を特殊な場合として包含する．言い換えれば、第 1 種のベータ分布（B1）は一様分布の一般化となっている．

第 1 種のベータ分布（B1）の一般化として様々な分布が提案されている（例えば、Nadarajah and Gupta 2004 参照）．それらの中から代表的な例を一つ挙げるとすれば、それは第 1 種の一般化ベータ分布（以下、適宜に GB1 と略記）となろう（McDonald 1984 や Nadarajah and Gupta 2004, p.118 等参照）．ここで、第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）とは、第 1 種のベータ分布（B1）に従う確率変数の巾変換の分布である．そして、確率変数の巾変換とは分布族を一般化する手法として最も一般的であり、実際、巾変換によって元の分布を特殊な場合として包含するより一般的な分布族を生成することは、単に分布の一般化と呼ばれることが多い．なお、巾変換によって一様分布を一般化した分布族は、巾関数分布とか巾分布と呼ばれる

*福岡大学経済学部, e-mail: kagihara@fukuoka-u.ac.jp

分布族（例えば，Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.210 や Leemis and McQueston 2008, p.52 等参照）に一致する．一様分布を一般化した巾分布は，一様分布と同様に，第 1 種のベータ分布（B1）にその特殊な例として包含される．

さて，第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）の更なる一般化として提案された分布の代表的な例として，一般化ベータ分布（以下，適宜に GB と略記）が挙げられる．GB は，GB1 と第 2 種の一般化ベータ分布（以下，適宜に GB2 と略記）の両者を包含するという観点から提案された分布である（McDonald and Xu 1995）．ここで，GB2 とは，無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される第 2 種のベータ分布（以下，適宜に B2 と略記）に従う確率変数の巾変換の分布であり，B2 とは F 分布の一般化である（例えば，McDonald 1984 や Libby and Novick 1982, Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.248, p.325, p.348 等参照）．GB1 の台が有限区間 $(0, 1)$ であるのに対して，GB2 の台が無限区間 $(0, \infty)$ であることに注意すると，その両者を一般化した分布である GB の台は必然的に母数に依存せざるを得なくなることが分かる．実際，これによって，GB は，GB1 と GB2 だけでなく，その極限としてガンマ分布や Weibull 分布等を包含する幅広い分布族となる（McDonald and Xu 1995 参照）．しかし，その代償として，GB の台が元来の GB1 の台とは異なることに注意する．

本稿は，分布の台として元来の有限区間を保持した上で，第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）の更なる一般化を提示する．即ち，McDonald and Xu (1995) の一般化ベータ分布（GB）が GB1 と GB2 の両者を包含するという観点から提示された分布であるのに対して，本稿によって提示される分布は，分布の台を固定したままに GB1 を一般化する分布である．本稿によって用いられる一般化の手法は，純粹に分布を一般化するという観点からは理論的により自然で一貫性があると思われる．実際，本稿による一般化の手法は，有限区間上に定義される任意の連続分布に対して適用可能である．例えば，台を固定したままに B1 を一般化する分布族として，GB1 の他に，Libby and Novick (1982) の一般化ベータ分布を挙げられる（例えば，Pham-Gia and Duong 1989 や Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995,

pp.251–252, Nadarajah and Gupta 2004, pp.120–123 等参照）。本稿の手法をこの分布に適用することによって、その一般的な分布族を構成することも可能である。

以下、本稿の構成は次の通りである。まず、第 2 節において、有限区間上に定義される分布族の一般化について、その理論的背景を議論する。次に、その議論に従って、第 3 節において、有限区間 $(0, 1)$ 上に定義される第 1 種のベータ分布 (B1) や第 1 種の一般化ベータ分布 (GB1) を台を区間 $(0, 1)$ に固定したままに一般化する。その過程で得られる分布の性質や密度関数の形状についてはそれぞれ補論 A と補論 B で提示される。最後に、第 4 節において、結論を述べる。

2 有限区間上の分布の一般化：理論的背景

本節は、有限区間上に定義される連続型の分布に対して、その区間を所与として固定した上で一般化するに際して、考慮すべき論点とその理論的背景について議論する。

確率変数の巾変換は、第 1 節で述べたように、分布族を一般化する際の最も一般的な手法である。但し、巾変換による分布の一般化を議論する際には、それによる台の変換にも注意を払う必要がある。実際、 $m < M$ なる任意の実数 m と M に対して有限区間 (m, M) に値を取る確率変数 X を考える時、任意の正の実数 $\gamma > 0$ に対する X の巾変換 X^γ が常に X と同じ区間 (m, M) に値を取るようになるのは、 $m = 0$ かつ $M = 1$ の場合に限られることに注意する。この点、任意の実数 x に対して、 $x = x^\gamma \iff x(1 - x^{\gamma-1}) = 0 \iff x = 0$ または $x = 1$ であり、かつ、巾変換 X^γ が単調増加変換であることに注意せよ。

以上の議論により、巾変換によって分布を一般化する手法を有限区間上の分布に対して適用する場合、分布の台が一定に保たれるのは $(0, 1)$ 上の分布のみであることが理解される。その上で、任意の有限区間に対して定義される任意の連続分布の一般化を考察する場合、次の 2 点に注意する。

第一には、任意の有限区間上の分布は、区間 $(0, 1)$ 上の分布を標準型と

してその位置尺度分布族として表現されるので、任意の有限区間上の分布の一般化は、その標準型の分布に従う確率変数の巾変換の位置尺度分布族によって得られるという点である。第二には、有限区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数に対しては、対数変換を経由することによって、直接に巾変換を適用する場合よりも更に一般的な分布族を生成することが可能になるという点である。なお、確率変数の対数変換については、有限区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う確率変数に対して負の対数変換を施せば、新たに無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る確率変数が導かれ、かつ、その分布は指数分布に一致するという事実に鑑みれば、分布の生成を考察する上において理論的に重要な役割を果たすことが理解されよう。

上記の 2 点について、以下の各節で個別に議論する。

2.1 有限区間上の分布の標準型と位置尺度分布族

$m < M$ なる任意の実数 m と M に対して、有限区間 (m, M) 上に定義される連続型の分布を考える。この時、この分布に従う確率変数 X に対する $Z = (X - m)/(M - m)$ なる 1 次変換によって有限区間 $(0, 1)$ を台とする確率変数 Z が生成され、逆に、この Z に対する 1 次変換 $X = m + (M - m)Z$ によって区間 (m, M) を台とする確率変数 X を復元することができる。即ち、有限区間上に定義される任意の連続分布は、区間 $(0, 1)$ 上に定義される分布を標準型として、その位置尺度分布族として表現される。この点について、以下で確認しておく。

有限区間 (m, M) 上に定義される密度関数 f_* に対して $X \sim f_*$ とする。ここで、実数 μ と正の実数 σ に対して X を 1 次変換する。即ち、 $Y := \mu + \sigma X$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ とする。ここで、等号 $:=$ はその左辺をその右辺によって定義することを意味する。この時、確率変数 Y の分布を μ を位置母数、 σ を尺度母数とする f_* の位置尺度分布族という。その分布関数 F は、その定義により、 $y > \mu + \sigma m$ なる y に対して、次式として表される：

$$F(y|\mu, \sigma) := P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) = F_*\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right).$$

但し, $P(Y \leq y)$ は確率変数 Y の実現値が実数 y 以下になるという事象の確率を表し, F_* は X の分布関数を表す. 従って,

$$F_*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} f_*(x)dx$$

に注意すると, Y の密度関数 f は F の導関数 $dF(y|\mu, \sigma)/dy$ として導出される:

$$f(y|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f_*\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), \quad y \in (\mu + \sigma m, \mu + \sigma M). \quad (1)$$

$\mu = 0, \sigma = 1$ の場合, 確かに $f(y|0, 1) = f_*(y), y \in (m, M)$ を得ることに注意する.

さて, 先ず, (1) 式において

$$\mu + \sigma m = 0, \quad \mu + \sigma M = 1$$

と置くと, その同値変形により,

$$\mu = -\frac{m}{M-m}, \quad \sigma = \frac{1}{M-m}$$

を得る. 即ち, 有限区間 (m, M) に値を取る確率変数 $X \sim f_*$ の 1 次変換

$$Z := -\frac{m}{M-m} + \frac{1}{M-m}X = \frac{X-m}{M-m}$$

は有限区間 $(0, 1)$ に値を取り, かつ, Z の密度関数を f_0 と置けば, (1) 式により次の表現を得る:

$$f_0(z) = (M-m)f_*((M-m)z+m), \quad z \in (0, 1). \quad (2)$$

次に, 逆の場合を考える. 即ち, 有限区間 $(0, 1)$ を台とする確率変数 Z に対して, その 1 次変換

$$X := m + (M-m)Z, \quad m < M$$

は有限区間 (m, M) に値を取り、かつ、 X の密度関数を f と置けば、(1) 式により、 $Z \sim f_0$ に対して次式の表現を得る：

$$f(x|m, M-m) = \frac{1}{M-m} f_0\left(\frac{x-m}{M-m}\right), \quad x \in (m, M). \quad (3)$$

以上の議論により、有限区間 (m, M) を台とする密度関数 f_* と $X \sim f_*$ に対して $(m < M)$ 、その 1 次変換 $Z := (X - m)/(M - m)$ の密度関数は (2) 式で定義される f_0 となり、更に、その Z の 1 次変換 $m + (M - m)Z$ の密度関数は、(3) 式の f_0 に (2) 式を代入することにより、 f_* に帰着することが確かめられる：

$$f(x|m, M-m) = \frac{1}{M-m} \times (M-m) f_*\left((M-m) \times \frac{x-m}{M-m} + m\right) = f_*(x).$$

これにより、有限区間上の任意の連続分布は、区間 $(0, 1)$ 上に定義される分布を標準型として、その位置尺度分布族として表現されることが確認された。従って、任意の有限区間上の分布の一般化は、その標準型の分布に従う確率変数の巾変換の位置尺度分布族によって得られるということが分かる。よって、以下では、特に断りのない限り、区間 $(0, 1)$ 上に定義される分布を議論の対象にする。

2.2 有限区間上の分布の一般化：対数変換と巾変換

有限区間 $(0, 1)$ に値を取る確率変数に対しては、直接に巾変換して一般化する場合よりも、対数変換を経由することによって更に一般的な分布族を生成することが可能になる。

$(0, 1)$ に値を取る確率変数 Z に対して、 Z の分布を一般化した分布とは、通常の場合、正の実数 γ に対して Z の巾変換 Z^γ の分布のことをいう。さて、 Z の対数変換 $X := -\log Z$ は無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る確率変数であり、かつ、その指数変換 $\exp(-X) = Z$ は再び $(0, 1)$ に値を取る確率変数であることに注意する。ここで、正の実数 $\delta > 0$ に対して X の巾変換 X^δ による分布の一般化を考えると、 $X^\delta = (-\log Z)^\delta$ もまた X と同

様に無限区間 $(0, \infty)$ に値を取る確率変数である。従って、その指数変換 $Z_* := \exp(-X^\delta) = \exp(-(-\log Z)^\delta)$ は $(0, 1)$ に値を取る確率変数となる。また、 Z_* の巾変換 $Z_*^\gamma = \exp(-\gamma X^\delta) = \exp(-\gamma(-\log Z)^\delta)$ は、 $\delta = 1$ とした場合に $\exp(-\gamma X) = \exp(\gamma \log Z) = Z^\gamma$ に帰着する。これにより、 Z の単純な巾変換 Z^γ に比して、対数変換を経由しつつ巾変換を適用した Z_*^γ によってより一般的な分布族が生成されることが分かる。なお、 Z の単純な巾変換 Z^γ とは、その対数変換 $-\log Z^\gamma = -\gamma \log Z$ を考えると、 Z の対数変換 $X = -\log Z$ の尺度変換 γX に対応することが分かる。

上述の議論について、以下の各節において密度関数を用いて確認しておく。その為、有限区間 $(0, 1)$ または無限区間 $(0, \infty)$ 上に定義される密度関数の全体を考える：

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}} := \left\{ f \mid f : \mathcal{X} \rightarrow (0, \infty), \int_{\mathcal{X}} f(x) dx = 1 \right\}, \quad \mathcal{X} = (0, 1), (0, \infty).$$

2.2.1 巾変換による分布の一般化

$f_* \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ として ($\mathcal{X} = (0, 1), (0, \infty)$)、 $Z \sim f_*$ と正の実数 $\gamma > 0$ に対して、 $X := Z^\gamma$ の分布を f_* の一般化された分布という。 X の密度関数を f_0 と表記すれば、その定義により、 $f_* \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ ならば $f_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ である ($\mathcal{X} = (0, 1), (0, \infty)$)。また、密度関数 f_* と f_0 の間に成立する関係は次のようにして得られる。 X の分布関数を F_0 と表記すれば、その定義により、 $x \in \mathcal{X}$ に対して

$$F_0(x|\gamma) := P(X \leq x) = P\left(Z \leq x^{\frac{1}{\gamma}}\right) =: F_*\left(x^{\frac{1}{\gamma}}\right)$$

として表される。但し、 F_* は Z の分布関数を表す。従って、

$$F_*\left(x^{\frac{1}{\gamma}}\right) = \int_0^{x^{\frac{1}{\gamma}}} f_*(z) dz$$

に注意すると、 X の密度関数 f_0 は F_0 の導関数 $dF_0(x|\gamma)/dx$ として次のように得られる：

$$f_0(x|\gamma) = \frac{1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}-1} f_*\left(x^{\frac{1}{\gamma}}\right), \quad x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} = (0, 1), (0, \infty). \quad (4)$$

$\delta := 1/\gamma$ なる母数変換を施すと, $X := Z^\gamma = Z^{1/\delta}$ の密度関数 f_0 の別表現が得られる ($0 < \delta < \infty$):

$$f_0(x|\delta) = \delta x^{\delta-1} f_*(x^\delta), \quad x \in \mathcal{X}, \mathcal{X} = (0, 1), (0, \infty). \quad (5)$$

以上のように, (4) 式もしくは (5) 式で定義された密度関数 f_0 を持つ確率分布は元々の分布 f_* の一般化と呼ばれる. なお, 巾変換によって一般化された分布は, 指数分布に従う確率変数の巾変換によって生成される Weibull 分布に因んで, Weibull 的に一般化された分布とか単に Weibull 化された分布と呼ばれることもある (例えば, Johnson, Kotz and Balakrishnan 1995, p.248 や Nadarajah and Gupta 2004, p.118 等参照).

以下においては, 特に断らない限り, 慣用に従って, 一般化分布の密度関数 f_0 としては (5) 式の表現を用いる. なお, (5) 式で定義される一般化分布の密度関数 f_0 は, $\delta = 1$ とした場合, 元の分布の密度関数 f に帰着することに注意する: $f_0(x|1) = f_*(x)$.

2.2.2 対数変換と指数変換による台の変換

本節は, 対数変換と指数変換によって生成される分布について議論する.

先ず, $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ と $X \sim f$ に対して, X の負の対数変換 $Y := -\log X$ の密度関数を g と表記すれば, $g \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ である. この時, 密度関数 f と g の間に成立する関係は次のようにして得られる. Y の分布関数を G と表記すると, G は, その定義により, 任意の正の実数 y に対して次式と得られる:

$$G(y) := P(Y \leq y) = P(X \geq e^{-y}) = 1 - F(e^{-y}).$$

但し, F は X の分布関数を表す:

$$F(e^{-y}) = \int_0^{e^{-y}} f(x) dx.$$

よって, Y の密度関数 g はその分布関数 G の導関数 $dG(y)/dy$ として次のように得られる:

$$g(y) = e^{-y} f(e^{-y}), \quad y \in (0, \infty). \quad (6)$$

次に, $g \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ と $Y \sim g$ に対して, 負の指数変換 $X := e^{-Y}$ の密度関数を f と表記すれば, $f \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ である. この時, 密度関数 g と f の間に成立する関係は次のようにして得られる. X の分布関数を F と表記すると, F は, その定義により, 任意の $x \in (0, 1)$ に対して次式と得られる:

$$F(x) := P(X \leq x) = P(Y \geq -\log x) = 1 - G(-\log x).$$

但し, G は Y の分布関数を表す:

$$G(-\log x) = \int_0^{-\log x} g(y) dy.$$

よって, X の密度関数 f はその分布関数 F の導関数 $dF(x)/dx$ として次のように得られる:

$$f(x) = \frac{1}{x} g(-\log x), \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

以上の議論により, $X \sim f \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ に対して, その対数変換 $Y = -\log X$ の密度関数は (6) 式で定義される $g \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ となり, 更に, その Y の指数変換 e^{-Y} の密度関数を h と表記すると, それは, (7) 式の g に (6) 式を代入することにより, f に帰着することが確認される:

$$h(x) = \frac{1}{x} e^{\log x} f(e^{\log x}) = f(x).$$

これにより, 対数変換によって生成される分布族 (6) 式とは, その指数変換によって元の分布に戻る分布族に他ならないことが確認された. この観点に基づいて, 対数変換によって生成される分布族 (6) 式は, 元の分布族の名に指数という語を冠して呼ばれることが多い. 同様に, 指数変換によって生成される分布族 (7) 式とは, その対数変換によって元の分布に戻る分布族に他ならず, 元の分布族の名に対数という語を冠して呼ばれることが多い. その著名な例として, 対数正規分布を挙げることができよう. その一方で, Weibull 分布や F 分布に従う確率変数の対数変換の分布に対して, 指数 Weibull 分布や指数 F 分布とは呼ばずに, それぞれ対数 Weibull 分布や対数 F 分布と呼ぶ例もあることに注意する (例えば, Johnson, Kotz and

Balakrishnan 1995, p.3, p.330 や Rinne 2009, pp.131–133 等参照)．しかし，本稿においては，特に断らない限り，対数正規分布の例に従った命名規則を採用することにする．

2.2.3 対数変換と巾変換による分布の一般化

$f_* \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ と $Z \sim f_*$ に対して， Z の巾変換 $X := Z^\gamma$ の密度関数は (4) 式で与えられる $f_0 \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ となる ($\gamma > 0$)．ここで， X の対数変換 $Y := -\log X$ の密度関数を g_0 と表記すれば， $g_0 \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ であり，かつ，(6) 式の f として (4) 式で与えられる f_0 を適用することにより，次の表現を得る：

$$g_0(y|\gamma) = e^{-y} f_0(e^{-y}|\gamma) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{y}{\gamma}} f_*\left(e^{-\frac{y}{\gamma}}\right). \quad (8)$$

その一方で， $f_* \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ と $Z \sim f_*$ に対して， Z の対数変換 $X := -\log Z$ の密度関数を g_* と表記すると， $g_* \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ であり，かつ，それは (6) 式の f として f_* を適用したものである．更に， X の尺度変換 $Y := \gamma X$ の密度関数を g_0 と表記すると ($\gamma > 0$)， $g \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ であり，かつ，(1) 式を参照することにより，次式として得られる：

$$g_0(y|\gamma) = \frac{1}{\gamma} g_*\left(\frac{y}{\gamma}\right) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{y}{\gamma}} f_*\left(e^{-\frac{y}{\gamma}}\right). \quad (9)$$

(8) 式と (9) 式を比較することにより，有限区間 $(0, 1)$ 上の分布に対して直接に巾変換を適用することで分布を一般化することとは，その対数変換の分布の尺度分布族を考えることに等しいと分かる．

以上に対して，無限区間 $(0, \infty)$ 上の分布に対して巾変換を適用することで分布を一般化することは，有限区間 $(0, 1)$ 上の分布に対して新たな母数を追加することになる．これは，有限区間 $(0, 1)$ 上の任意の連続分布の一般化においては，直接に巾変換して一般化する場合よりも，対数変換を経由することによって更に一般的な分布族を生成できることを意味する．この点について，以下で確認する．

$f_* \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ と $Z \sim f_*$ に対して, Z の対数変換 $X := -\log Z$ の密度関数を g_* と表記すると, $g_* \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ であり, かつ, それは (6) 式の f として f_* を適用したものである. 更に, その巾変換 $Y := X^{1/\delta}$ の密度関数を g_0 と表記すると, $g_0 \in \mathcal{D}_{(0,\infty)}$ であり, かつ, (5) 式の f_* に g_* を適用したものである:

$$g_0(y|\delta) = \delta y^{\delta-1} g_*(y^\delta) = \delta y^{\delta-1} e^{-y^\delta} f_*(e^{-y^\delta}). \quad (10)$$

ここで, Y の指数変換 $Z_* := e^{-Y}$ の密度関数を f_0 と表記すると, $f_0 \in \mathcal{D}_{(0,1)}$ であり, かつ, (7) 式の g に g_0 を適用することにより次式が得られる:

$$\begin{aligned} f_0(z|\delta) &= \frac{1}{z} g_0(-\log z|\delta) \\ &= \frac{\delta}{z} \left(\log \frac{1}{z} \right)^{\delta-1} e^{-(\log \frac{1}{z})^\delta} f_* \left(e^{-(\log \frac{1}{z})^\delta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

これは, $\delta = 1$ の場合, 確かに f_* に帰着する: $f_0(z|1) = f_*(z)$. 即ち, f_0 は確かに f_* の一般化になっている.

3 ベータ分布の一般化

任意の正の実数 $\alpha, \beta > 0$ に対して積分 $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$ は存在する (例えば, 犬井 1962, p.12 や杉浦 1980, pp.295–296 参照). この積分を α と β の関数と見做したものをベータ関数といい, $B(\alpha, \beta)$ 等と表記する:

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (12)$$

任意の正の実数 $\alpha, \beta > 0$ と $(0, 1)$ 区間内の任意の実数 $x \in (0, 1)$ に対して, $x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} > 0$ であるので, 積分の性質により, ベータ関数は常に正値を取ることが分かる. 即ち, 任意の $\alpha, \beta > 0$ に対して $B(\alpha, \beta) > 0$ である.

第 1 種のベータ分布 (B1) とは, ベータ関数を正規化定数として密度関数を構成した確率分布である. つまり, 次の (13) 式として区間 $(0, 1)$ 上に

定義される関数 f_* を密度関数に持つ確率分布は B1 または単にベータ分布 (特に, B1 の標準型または単に標準ベータ分布) と呼ばれる ($\alpha, \beta > 0$):

$$f_*(z|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1}, \quad 0 < z < 1. \quad (13)$$

実際, $\alpha, \beta > 0$ と $B(\alpha, \beta) > 0$ に注意すると, 任意の $z \in (0, 1)$ に対して, $z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} > 0$ であるので $f_*(z|\alpha, \beta) > 0$ を得る. また, ベータ関数の定義に注意すると, $\int_0^1 f_*(z|\alpha, \beta) dz = 1$ を得る. よって, 関数 f_* は, 非負値性と正規化条件を満たすので, 確かに密度関数である.

なお, (13) 式で定義される密度関数 f_* と確率変数 $Z \sim f_*$ に対して, $m < M$ として Z の 1 次変換 $X := m + (M - m)Z$ の密度関数 f は, (3) 式の f_0 として f_* を適用にすることにより, $m < x < M$ なる実数 x に対して, 次式で与えられる ($0 < \alpha, \beta < \infty$):

$$f(x|\alpha, \beta, m, M) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{(x-m)^{\alpha-1} (M-x)^{\beta-1}}{(M-m)^{\alpha+\beta-1}}.$$

この f を密度関数に持つ分布は, m を位置母数, $(M - m)$ を尺度母数とする標準ベータ分布 (B1 の標準型) の位置尺度分布族であり, 単にベータ分布 (B1) とも呼ばれる.

3.1 一般化指数ベータ分布

本節では, 巾変換によるベータ分布 (B1) の直接的な一般化 (GB1) の更なる一般を得る為の準備として, 一般化指数ベータ分布を導入する. 一般化指数ベータ分布は, B1 に従う確率変数の対数変換によって指数ベータ分布を得た上で, それに従う確率変数の巾変換によって得られる. 一般化指数ベータ分布の幾つかの性質については, 補論 A において議論する.

さて, (13) 式で定義される標準ベータ分布 (B1) の密度関数 f_* と $Z \sim f_*$ に対して, Z の負の対数変換後に巾変換を施した $V := (-\log Z)^{1/\delta}$ の密度関数を g_0 と置くと ($0 < \delta < \infty$), (10) 式により次式を得る:

$$g_0(v|\alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta}{B(\alpha, \beta)} v^{\delta-1} e^{-\alpha v^\delta} \left(1 - e^{-v^\delta}\right)^{\beta-1}, \quad 0 < v < \infty. \quad (14)$$

(14) 式で定義された密度関数 g_0 を持つ確率分布を一般化指数ベータ分布の標準型（以下では、標準一般化指数ベータ分布）といい、通常の場合、その尺度分布族を単に一般化指数ベータ分布と呼ぶ。その密度関数を g と置けば、次式が導かれる：

$$g(v|\alpha, \beta, \delta, \sigma) = \frac{\delta}{\sigma B(\alpha, \beta)} \left(\frac{v}{\sigma}\right)^{\delta-1} \exp \left[-\alpha \left(\frac{v}{\sigma}\right)^{\delta} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\left(\frac{v}{\sigma}\right)^{\delta} \right] \right\}^{\beta-1} \quad (15)$$

ここで、尺度母数 σ を始めとする母数は全て正値であることに注意する： $\alpha, \beta, \delta, \sigma \in (0, \infty)$ 。 $\sigma = 1$ の場合、一般化指数ベータ分布の密度関数 (15) 式は、確かに標準一般化指数ベータ分布の密度関数 (14) 式に帰着する： $g(v|\alpha, \beta, \delta, 1) = g_0(v|\alpha, \beta, \delta)$, $v > 0$ 。以上、一般化指数ベータ分布の密度関数の導出過程の詳細については、例えば、鍵原（2019）を参照されたい。

さて、一般化指数ベータ分布の密度関数 (15) 式は、 $\delta = 1$ の場合、指数ベータ分布の密度関数

$$g(v|\alpha, \beta, 1, \sigma) = \frac{1}{\sigma B(\alpha, \beta)} e^{-\frac{\alpha v}{\sigma}} \left(1 - e^{-\frac{v}{\sigma}}\right)^{\beta-1} \quad (16)$$

となり、更に、 $\alpha = \beta = 1$ の場合、指数分布の密度関数に帰着する：

$$g(v|1, 1, 1, \sigma) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{v}{\sigma}}.$$

また、指数ベータ分布の密度関数 (16) 式は、 $\sigma = 1$ の場合、その標準型（標準指数ベータ分布）の密度関数となる：

$$g(v|\alpha, \beta, 1, 1) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} e^{-\alpha v} (1 - e^{-v})^{\beta-1}. \quad (17)$$

これは、(13) 式で定義される標準ベータ分布（B1）の密度関数 f_* に対して (6) 式を適用した結果でもあることに注意する： $g(v|\alpha, \beta, 1, 1) = e^{-v} f_*(e^{-v})$ 。なお、標準指数ベータ分布の密度関数 (17) 式の形状は、母数の β に依存し、 $\beta \leq 1$ の場合には単調減少型、 $\beta > 1$ の場合には単峰型となる（鍵原 2019）。また、密度関数 (17) 式の形状に及ぼす母数 α の影響については、補論 A で議論する。

3.2 ベータ分布の一般化

(14) 式で定義される標準一般化指数ベータ分布の密度関数 g_0 と $V \sim g_0$ に対して、 V の負の指数変換 $X := e^{-V}$ の確率分布を導出する． V の台が無限区間 $(0, \infty)$ であることに注意すると、 X の台は有限区間 $(0, 1)$ であることが分かる．ここで、 X の密度関数を f_0 と表記すると、(14) 式で定義される標準一般化指数ベータ分布の密度関数 g_0 に対して (7) 式を適用することにより、次式が得られる：

$$f_0(x|\alpha, \beta, \delta) = \frac{1}{x} g_0(-\log x|\alpha, \beta, \delta), \quad x \in (0, 1).$$

従って、 $x \in (0, 1)$ に対して、 X の密度関数 f_0 は次式となる ($\alpha, \beta, \delta > 0$)：

$$f_0(x|\alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta}{xB(\alpha, \beta)} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\delta-1} e^{-\alpha(\log \frac{1}{x})^\delta} \left[1 - e^{-(\log \frac{1}{x})^\delta} \right]^{\beta-1}. \quad (18)$$

これは、(11) 式の f_* として (13) 式で定義される標準ベータ分布 (B1) の密度関数 f_* を適用した結果でもあることに注意する．

(18) 式で定義される密度関数 f_0 は、 $\delta = 1$ の場合、(13) 式で定義される B1 の密度関数 f_* に帰着することが確認される：

$$f_0(x|\alpha, \beta, 1) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = f_*(x|\alpha, \beta).$$

よって、(18) 式で定義される密度関数 f_0 を持つ確率分布は、(13) 式で定義される標準ベータ分布 (B1) の一つの一般化になっていることが分かる．

この確率分布は、第 2 節で議論した分布族の命名規則に従うと、対数一般化指数ベータ分布の標準型 (標準対数一般化指数ベータ分布) と呼ばれることになる．但し、以下では、標準ベータ分布 (B1) の巾変換による直接的な一般化である GB1 に対して、B1 の別なる一般化になっているという観点から AGB1 と略記することにする．

3.3 一般化ベータ分布の更なる一般化

(18) 式で定義される標準対数一般化指数ベータ分布（AGB1）の密度関数 f_0 に対して $X \sim f_0$ とする．ここで，正の実数 γ に対して X の中変換 $Y := X^{1/\gamma}$ の確率分布を導出する． Y の密度関数を f と表記すると， f は，(5) 式の f_* として f_0 を適用することによって導かれる：

$$f(y|\alpha, \beta, \delta, \gamma) = \gamma y^{\gamma-1} f_0(y^\gamma|\alpha, \beta, \delta).$$

従って， $y \in (0, 1)$ なる y に対して， Y の密度関数 f は次式と得られる ($0 < \alpha, \beta, \delta, \gamma < \infty$)：

$$f(y|\alpha, \beta, \delta, \gamma) = \frac{\delta \gamma^\delta}{y B(\alpha, \beta)} \left(\log \frac{1}{y} \right)^{\delta-1} e^{-\alpha \gamma^\delta (\log \frac{1}{y})^\delta} \left[1 - e^{-\gamma^\delta (\log \frac{1}{y})^\delta} \right]^{\beta-1}. \quad (19)$$

(19) 式で定義される密度関数 f は， $\gamma = 1$ の場合，(18) 式で定義される標準対数一般化指数ベータ分布（AGB1）の密度関数 f_0 に帰着することに注意する： $f(y|\alpha, \beta, \delta, 1) = f_0(y|\alpha, \beta, \delta)$ ．また， $\delta = 1$ の場合，

$$\begin{aligned} f(y|\alpha, \beta, 1, \gamma) &= \frac{\gamma}{y B(\alpha, \beta)} e^{\alpha \gamma \log y} [1 - e^{\gamma \log y}]^{\beta-1} \\ &= \frac{\gamma}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha \gamma - 1} (1 - y^\gamma)^{\beta-1} \end{aligned}$$

を得る．これは第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）の標準型の密度関数に他ならない（McDonald 1984 や Nadarajah and Gupta 2004, p.118 参照）．即ち，これは，(13) 式で定義される標準ベータ分布（B1）の密度関数 f_* と $Z \sim f_*$ に対して， Z の中変換 $Z^{1/\gamma}$ の密度関数である．

以上の議論によって，次の命題を得る：

命題 1 (固定された区間上における一般化ベータ分布の一般化)．(19) 式で定義される密度関数 f は， $\delta = 1$ の場合，第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）の密度関数に帰着する ($0 < y < 1$)：

$$f(y|\alpha, \beta, 1, \gamma) = \frac{\gamma}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha \gamma - 1} (1 - y^\gamma)^{\beta-1}. \quad (20)$$

また、 $\gamma = 1$ の場合、ベータ分布の別なる一般化である対数一般化指数ベータ分布 (AGB1) の密度関数 (18) 式に帰着する ($0 < y < 1$) :

$$f(y|\alpha, \beta, \delta, 1) = \frac{\delta}{yB(\alpha, \beta)} \left(\log \frac{1}{y} \right)^{\delta-1} e^{-\alpha(\log \frac{1}{y})^\delta} \left[1 - e^{-(\log \frac{1}{y})^\delta} \right]^{\beta-1}.$$

更に、 $\delta = \gamma = 1$ の場合、ベータ分布 (第 1 種のベータ分布 B1) の密度関数 (13) 式に帰着する ($0 < y < 1$) :

$$f(y|\alpha, \beta, 1, 1) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}.$$

(19) 式で定義される密度関数 f を持つ確率分布は、第 2 節で議論した分布族の命名規則に従うと、一般化対数一般化指数ベータ分布の標準型 (標準一般化対数一般化指数ベータ分布) と呼ばれることになる. その一方で、この分布は、命題 1 で見たように、第 1 種の一般化ベータ分布 (GB1) の更なる一般化にもなっている. この観点に基づいて、以下ではこの分布を GGB1 と略記することにする.

さて、(19) 式で定義された密度関数 f は一般化ベータ分布の更なる一般化 (GGB1) であり、そのグラフは補論 B に図示される. 特に、その特殊な場合として、第 1 種の一般化ベータ分布 (GB1, $\delta = 1$ の場合) の密度関数のグラフは補論 B.1, ベータ分布の別なる一般化 (AGB1, $\gamma = 1$ の場合) の密度関数のグラフは補論 B.2, そして、一般の場合 (GGB1, $\delta \neq 1$ かつ $\gamma \neq 1$ の場合) の密度関数のグラフは補論 B.3 に図示される. なお、通常のベータ分布 (B1, $\delta = \gamma = 1$ の場合) の密度関数は図 1 に示される.

4 結論

有限区間上の分布を一般化する際には、その分布に従う確率変数に対して巾変換を直接に適用するよりも、対数変換を経由しつつ巾変換を適用することによって、更に一般的な分布族を生成することが可能になる. 有限区間上の第 1 種のベータ分布 (B1) に対して、直接に巾変換をして得られた分布が第 1 種の一般化ベータ分布 (GB1, McDonald 1984) である. そ

れに対して、本稿は、対数変換を経由することによって、分布の台を所与として固定するという条件の下、GB1 を特殊な場合として包含するより一般的な分布族（GGB1, (19) 式）を構成した（命題 1 参照）。

参考文献

- [1] 犬井鉄郎（1962）『特殊函数』岩波書店.
- [2] 鍵原理人（2018）「ベータ分布の形状について」『福岡大学経済学論叢』第 62 巻第 1・2 号, pp.51–76.
- [3] 鍵原理人（2019）「ベータ確率変数の対数変換の分布の形状について」『福岡大学経済学論叢』第 63 巻第 2 号, pp.195–224.
- [4] 杉浦光夫（1980）『解析入門 I』東京大学出版会.
- [5] Alexander, C., G.M. Cordeiro, E.M.M. Ortega and J.M. Sarabia (2012) “Generalized beta-generated distributions”, *Computational Statistics and Data Analysis*, 56, pp.1880–1897.
- [6] Eugene, N., C. Lee and F. Famoye (2002) “Beta-normal distribution and its applications”, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 31, pp.497–512.
- [7] Johnson, N.L., S. Kotz and N. Balakrishnan (1995) *Continuous Univariate Distributions, Volume 2, 2nd edition*, John Wiley & Sons.
- [8] Leemis, M. L. and J. T. McQueston (2008) “Univariate distribution relationships”, *The American Statistician*, 62, 45–53.
- [9] Libby, D. L. and M. R. Novick (1982) “Multivariate generalized beta distributions with applications to utility assessment”, *Journal of Educational Statistics*, 7, pp.271–294.

- [10] McDonald, J. B. (1984) “Some generalized functions for the size distribution of income”, *Econometrica*, 52, pp.647–664.
- [11] McDonald, J.B. and Y.J. Xu (1995) “A generalization of the beta distribution with applications”, *Journal of Econometrics*, 66, pp.133–152.
- [12] Nadarajah, S. and A. Gupta (2004) “Generalizations and related univariate distributions”, In *Handbook of Beta Distribution and Its Applications*, edited by A.K. Gupta and S. Nadarajah, Marcel Dekker, pp.97–163.
- [13] Nadarajah, S. and S. Kotz (2006) “The beta exponential distribution”, *Reliability Engineering and System Safety*, 91, pp.689–697.
- [14] Pham-Gia, T. and Q. P. Duong (1989) “The generalized beta- and F-distributions in statistical modelling”, *Mathematical and Computer Modelling*, 12. pp.1613–1625.
- [15] Rinne, H. (2009) *The Weibull Distribution: A Handbook*, Taylor & Francis Group.

A 一般化指数ベータ分布の幾つかの性質

本補論は、(15) 式で定義される一般化指数ベータ分布について以下の 3 点に注意する。

まず、既に鍵原 (2019) で指摘されたように、McDonald and Xu (1995) によって提案された第 1 種の指数一般化ベータ分布（以下、適宜に EGB1 と略記）とは、(16) 式で定義される指数ベータ分布に他ならず、その結果として、(15) 式で定義される一般化指数ベータ分布は、EGB1 を特殊な場合として包含するより一般的な分布族であることに注意する。なお、第 2 節で言及した分布族の命名規則に従うと、EGB1 は、ベータ分布 (B1) に対して巾変換（一般化ベータ分布 GB1）の後に対数変換（指数一般化ベータ

分布 EGB1) を施すことで生成されるのに対して、本稿で議論した一般化指数ベータ分布 (15) 式は、対数変換（指数ベータ分布）の後に巾変換（一般化指数ベータ分布）を施すことで生成されることが分かる。

命題 2 (一般化指数ベータ分布と指数一般化ベータ分布). (15) 式で定義される一般化指数ベータ分布の密度関数 g は、 $\delta = 1$ の場合、(16) 式、即ち、指数ベータ分布の密度関数に帰着する ($\sigma, \alpha, \beta > 0$) :

$$g(v|\alpha, \beta, 1, \sigma) = \frac{1}{\sigma B(\alpha, \beta)} e^{-\frac{\alpha v}{\sigma}} (1 - e^{-\frac{v}{\sigma}})^{\beta-1}, \quad v \in (0, \infty).$$

指数ベータ分布の密度関数 (16) 式とは、*McDonald and Xu (1995)* の第 1 種の指数一般化ベータ分布 (EGB1) の密度関数に他ならない。

次に、指数ベータ分布 (16) 式と一般化指数ベータ分布 (15) 式は、その生成の手法は異なるものの、それぞれ Nadarajah and Kotz (2006) によって提示されたベータ指数分布とベータ Weibull 分布と本質的に同じ分布であることに注意する（鍵原 2019 参照）。なお、ベータ指数分布やベータ Weibull 分布の生成の手法とは次のようである。連続微分可能な分布関数 $F: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ に対して、(13) 式で定義される標準ベータ分布の密度関数 f_* を用いて新たな分布関数 $G: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$G(x) := \int_0^{F(x)} f_*(z) dz$$

を生成することができ、このようにして生成される分布はベータ F 分布という形で呼ばれる (Eugene, Lee and Famoye 2002, Nadarajah and Gupta 2004, p.146, Alexander, Cordeiro, Ortega and Sarabia 2012 等参照)。適用される分布関数 F が指数分布のものであればベータ指数分布が得られ、Weibull 分布のものであればベータ Weibull 分布が得られる (Nadarajah and Kotz 2006)。

最後に、一般化指数ベータ分布の特殊な場合である指数ベータ分布の母数と密度関数の形状の関係について、鍵原 (2019) で言及されていない点について議論を加える。(14) 式で定義された標準一般化指数ベータ分布の

密度関数 g_0 は, $\delta = 1$ の場合, (17) 式, 即ち, 標準指数ベータ分布の密度関数

$$g_0(v|\alpha, \beta, 1) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} e^{-\alpha v} (1 - e^{-v})^{\beta-1}, \quad v \in (0, \infty)$$

に帰着する ($\alpha, \beta > 0$). その形状は母数の β に依存し, $\beta \leq 1$ の場合には単調減少型, $\beta > 1$ の場合には単峰型となる (鍵原 2019). また, 母数の α と密度関数の形状の関係については以下の通りである.

命題 3 (指数ベータ分布の形状). (17) 式で定義される標準指数ベータ分布の密度関数 $g(v|\alpha, \beta, 1, 1) = g_0(v|\alpha, \beta, 1)$ について, そのグラフ $\{(v, g_0(v|\alpha, \beta, 1)) | v \in (0, \infty)\}$ の形状は, 正値の母数 α が大きくなると, その右裾が薄くなり, 左裾が厚くなる. 但し, 以下では $g_*(x|\alpha, \beta) := g_0(x|\alpha, \beta, 1)$ と表記する.

より正確に表現すると, $\alpha_1 < \alpha_2$ なる正値 α_1 と α_2 に対して, v が一定の正値 v_{12} より小さい場合には $g_*(v|\alpha_1, \beta) < g_*(v|\alpha_2, \beta)$, 大きい場合には $g_*(v|\alpha_1, \beta) > g_*(v|\alpha_2, \beta)$ であり, $v = v_{12}$ の場合には $g_*(v|\alpha_1, \beta) = g_*(v|\alpha_2, \beta)$ である:

$$v_{12} := \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \log \frac{B(\alpha_1, \beta)}{B(\alpha_2, \beta)} > 0.$$

証明. 標準指数ベータ分布の密度関数

$$g_*(v|\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} e^{-\alpha v} (1 - e^{-v})^{\beta-1}, \quad v \in (0, \infty)$$

により, ベータ関数 B の正値性に注意すると, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ に対して次の同値関係を得る:

$$\begin{aligned} \frac{g_*(v|\alpha_1, \beta)}{g_*(v|\alpha_2, \beta)} &= \frac{B(\alpha_2, \beta)}{B(\alpha_1, \beta)} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)v} \leq 1 \\ \iff v &\leq \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \log \frac{B(\alpha_1, \beta)}{B(\alpha_2, \beta)}. \end{aligned}$$

ここで, ベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ が α に関して単調減少であることに注意すると, $B(\alpha_1, \beta)/B(\alpha_2, \beta) > 1$ により, $\log[B(\alpha_1, \beta)/B(\alpha_2, \beta)] > 0$ を得て, 任

意の $\alpha_1 < \alpha_2$ に対して v_{12} は確かに正值である：

$$v_{12} := \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \log \frac{B(\alpha_1, \beta)}{B(\alpha_2, \beta)} > 0.$$

□

B 密度関数のグラフ

本補論は、(19) 式で定義される一般化対数一般化指数ベータ分布（GGB1）の密度関数 f のグラフ $\{(x, f(x|\alpha, \beta, \delta, \gamma)) | x \in (0, 1)\}$ について、正值母数 $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ の値を様々に変化させながら、横軸を x 、縦軸を $f(x|\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ として図示する。なお、本補論で提示する図は全て Maple 6 によるものである。

(19) 式で定義される GGB1 の密度関数 f は、 $\delta = 1$ の場合、第 1 種の一般化ベータ分布（GB1）の密度関数 (20) 式に帰着し、 $\gamma = 1$ の場合、(18) 式で定義される GB1 とは別なるベータ分布の一般化 AGB1 の密度関数 f_0 に帰着する。それぞれのグラフ $\{(x, f(x|\alpha, \beta, 1, \gamma)) | x \in (0, 1)\}$ と $\{(x, f(x|\alpha, \beta, \delta, 1)) | x \in (0, 1)\}$ はそれぞれ補論 B.1 と補論 B.2 で提示される。また、一般の $\delta \neq 1$ かつ $\gamma \neq 1$ の場合、つまり、一般の GGB1 の密度関数 f のグラフ $\{(x, f(x|\alpha, \beta, \delta, \gamma)) | x \in (0, 1)\}$ は補論 B.3 で提示される（表 1 参照）。

表 1: GGB1 の密度関数 (19) 式のグラフ（補論 B.3）

$\delta \backslash \gamma$	1/2	3/2	2	3
1/2	図 12	図 13	図 14	図 15
3/2	図 16	図 17	図 18	図 19
2	図 20	図 21	図 22	図 23
3	図 24	図 25	図 26	図 27

* δ : AGB1(18) 式の母数, γ : GB1(20) 式の母数.

更に, $\gamma = 1$ かつ $\delta = 1$ の場合, GGB1 の密度関数 f は, (13) 式で定義されるベータ分布 (B1) の密度関数 f_* に帰着し, その形状は大きく 5 類型に分類される. 即ち, B1 の密度関数の形状は, $\alpha = \beta = 1$ の場合に一樣分布, $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合に単峰型, $\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合に U 字型, $\alpha \neq \beta$ にして $\alpha \geq 1$ かつ $\beta \leq 1$ の場合に単調増加型, $\alpha \neq \beta$ にして $\alpha \leq 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合に単調減少型となる (鍵原 2018 参照). そのグラフ $\{(x, f(x|\alpha, \beta, 1, 1)) | x \in (0, 1)\}$ を提示したのが図 1 である. なお, 鍵原 (2018) でも指摘されているように, 英語版 Wikipedia は B1 の母数と密度の形状の関係について詳細かつ体系的に言及するが, その分類の視点は鍵原 (2018) と異なる. 実際, 英語版 Wikipedia では, 対称な場合 ($\alpha = \beta$) と非対称な場合 ($\alpha \neq \beta$) に分類した上で, 対称な場合を 3 つの場合 ($\alpha = \beta < 1$ の場合と $\alpha = \beta = 1$ の場合, $\alpha = \beta > 1$ の場合) に細分類し, そして, 非対称な場合を 6 つの場合 ($\alpha < 1$ かつ $\beta < 1$ の場合と $\alpha > 1$ かつ $\beta > 1$ の場合, $\alpha < 1$ かつ $\beta \geq 1$ の場合, $\alpha \geq 1$ かつ $\beta < 1$ の場合, $\alpha = 1$ かつ $\beta > 1$ の場合, $\alpha > 1$ かつ $\beta = 1$ の場合) に細分類して言及する (Wikipedia “Beta distribution”, last edited on 26 July 2019 参照, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution#Shapes).

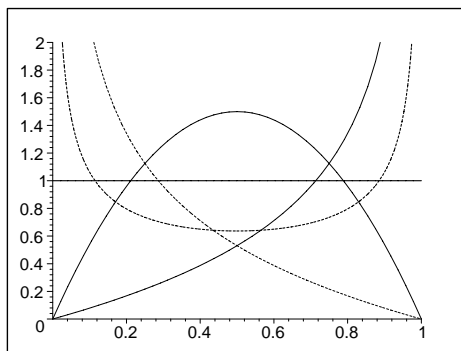


図 1: 密度関数 f のグラフ ($\delta = \gamma = 1$ の場合, ベータ分布 B1): $\alpha = \beta = 1$ (太実線, 一樣分布), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.1 $\delta = 1$ の場合：一般化ベータ分布（GB1）

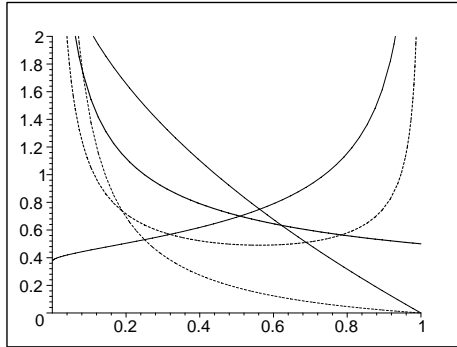


図 2: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 1/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

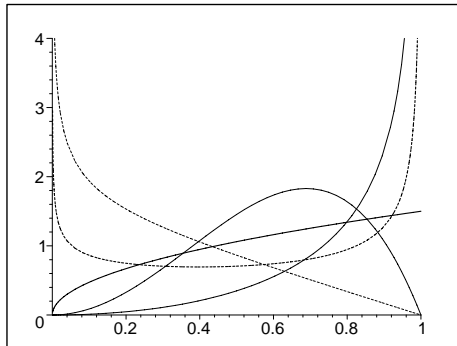


図 3: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

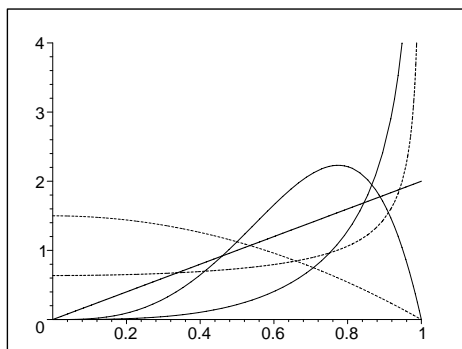


図 4: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

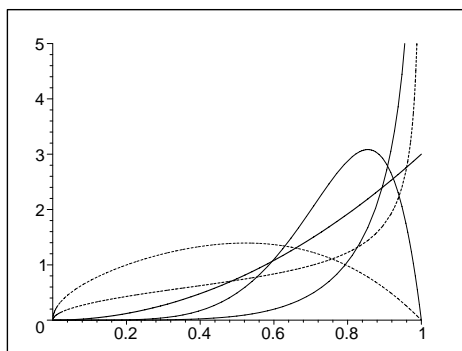


図 5: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

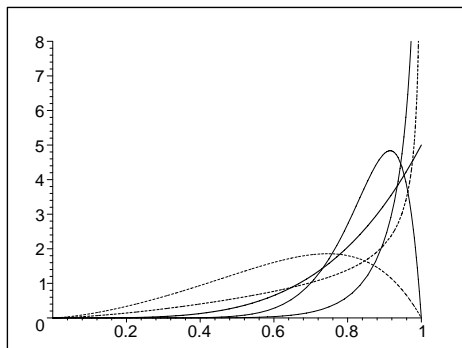


図 6: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 5$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.2 $\gamma = 1$ の場合 : ベータ分布の別な一般化 (AGB1)

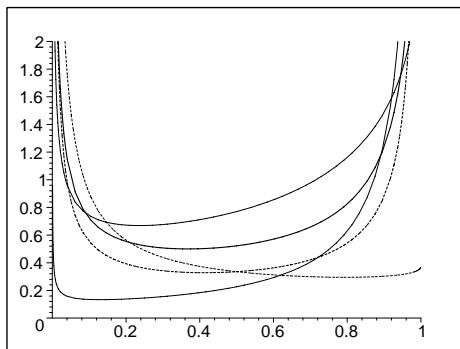


図 7: 密度関数 f のグラフ ($\delta = 1/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

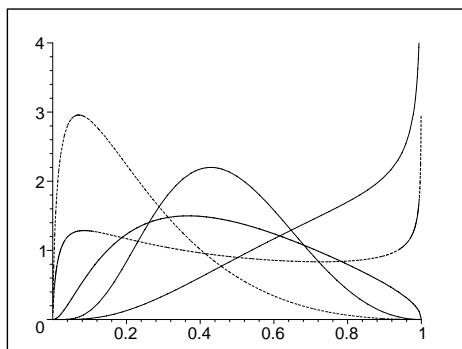


図 8: 密度関数 f のグラフ ($\delta = 3/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

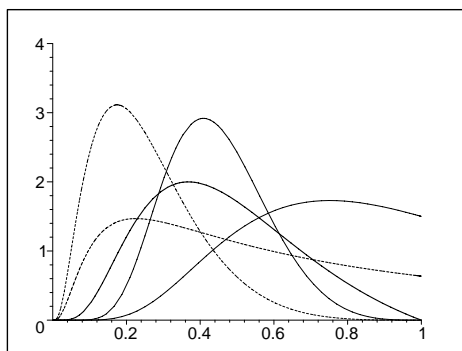


図 9: 密度関数 f のグラフ ($\delta = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

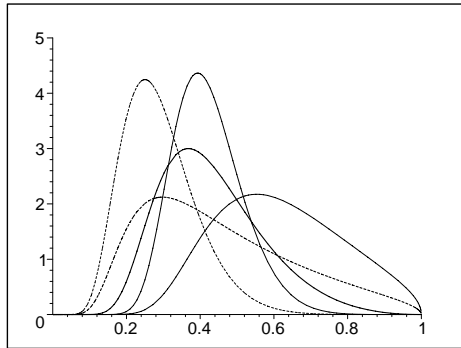


図 10: 密度関数 f のグラフ ($\delta = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

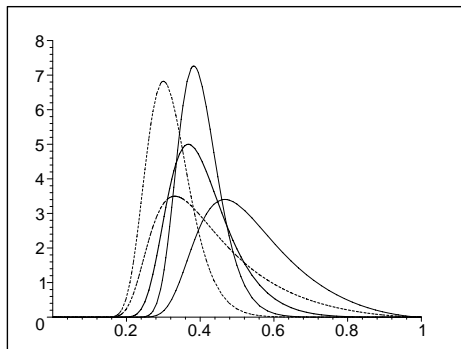


図 11: 密度関数 f のグラフ ($\delta = 5$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.3 $\delta \neq 1$ かつ $\gamma \neq 1$ の場合：一般化ベータ分布の 更なる一般化 (GGB1)

B.3.1 $\delta = 1/2$ の場合

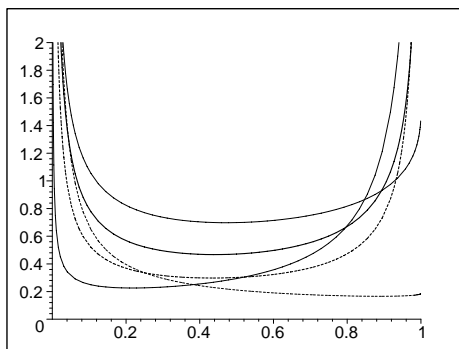


図 12: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 1/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

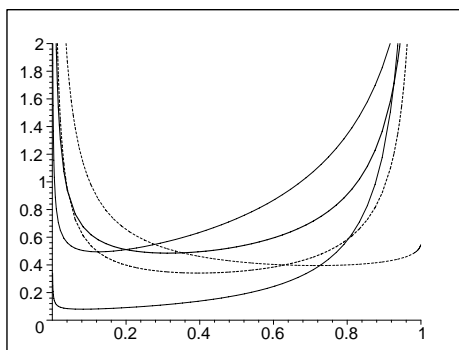


図 13: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

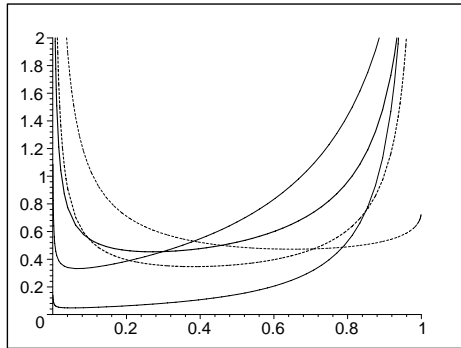


図 14: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

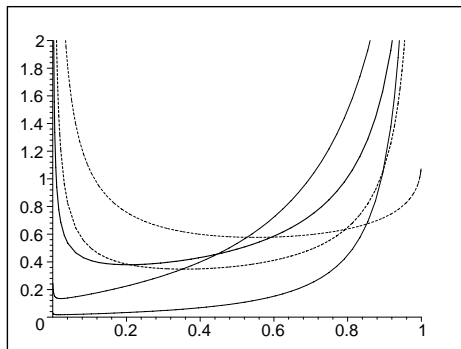


図 15: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.3.2 $\delta = 3/2$ の場合

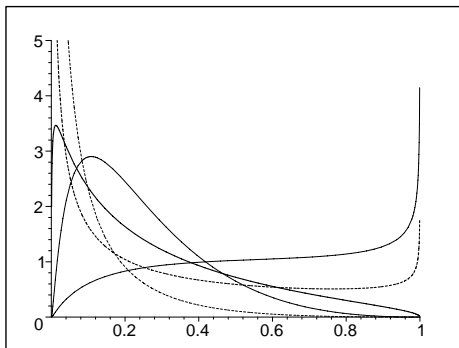


図 16: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 1/2$ の場合): $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

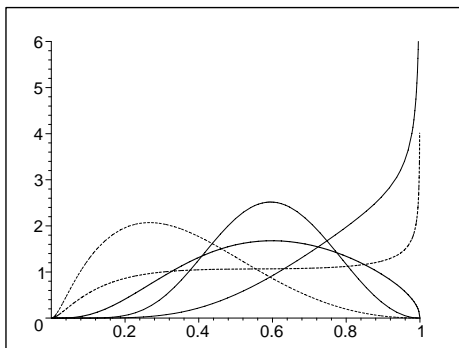


図 17: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3/2$ の場合): $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

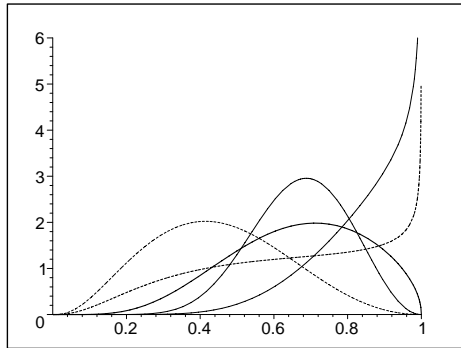


図 18: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

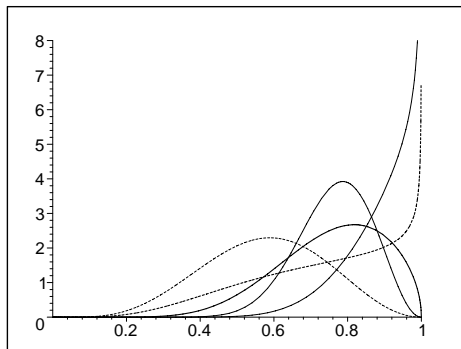


図 19: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.3.3 $\delta = 2$ の場合

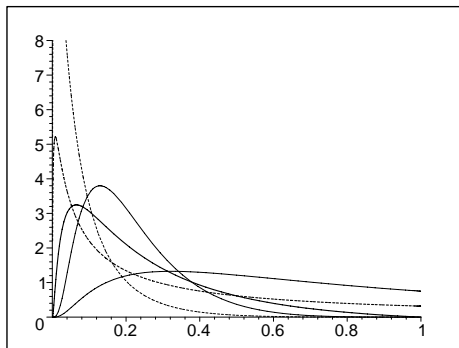


図 20: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 1/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

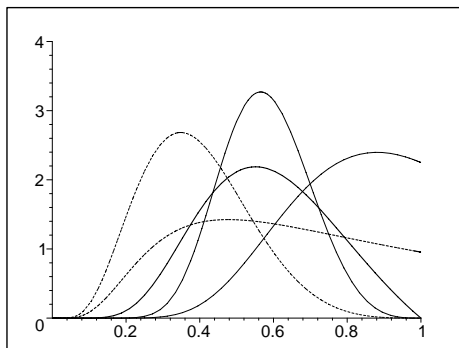


図 21: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

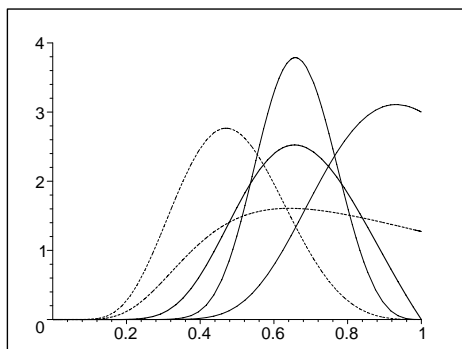


図 22: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

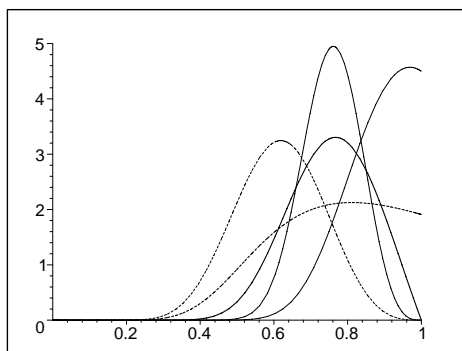


図 23: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

B.3.4 $\delta = 3$ の場合

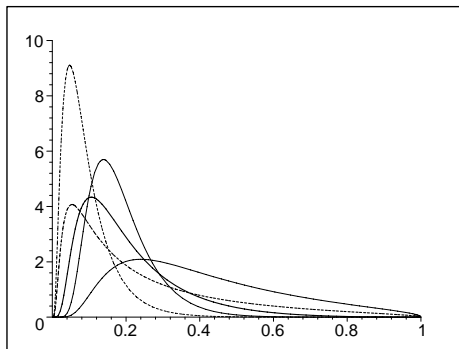


図 24: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 1/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

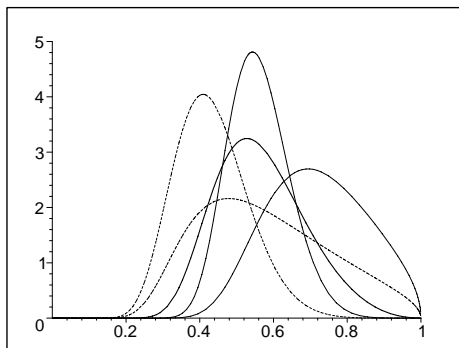


図 25: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3/2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

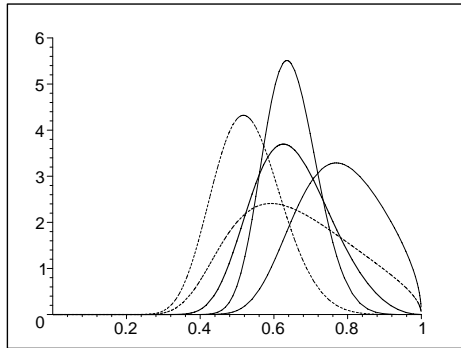


図 26: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 2$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)

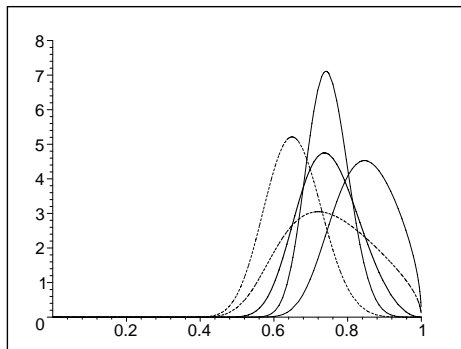


図 27: 密度関数 f のグラフ ($\gamma = 3$ の場合) : $\alpha = \beta = 1$ (太実線), $\alpha = \beta = 1/2$ (太点線), $\alpha = \beta = 2$ (実線), $\alpha = 1/2, \beta = 2$ (点線), $\alpha = 2, \beta = 1/2$ (細実線)