

《研究余禄》

# 固定数を選択する社会的選択規則の 設計の不可能性について

佐 藤 伸\*

## 1 序論

本稿では、知識の共有を目的として、よくある状況において基本的な性質を満足する選び方を設計することが不可能であることを説明する。

例として、ある会社における新規採用人事を考える。そこでは、書類審査と面接試験の2段階に分かれて選考を行うことになっており、面接試験に呼ぶ応募者をちょうど3人と決めている。また、その3人を書類に基づいて選考する際には、審査担当の社員の意見に基づいてのみ決めるとし、くじ等で選抜することはない。さらに、それらの社員の社内での役割は同一であり、彼らの意見は平等に扱われる。また、各応募者もある意味で平等に扱われるとする。この「ある意味で」とは、各応募者の「名前」が結果に影響しない、ということである。例えば、選考の過程において各応募者を受験番号のような番号で呼ぶときに、番号が小さいから選ばれやすかったり、逆に大きいから選ばれやすい、ということはない。さらに、どのような2人の応募者 $x$ と

---

\*福岡大学経済学部

$y$ についても、すべての審査担当者が応募者 $x$ は応募者 $y$ よりも優れていると考えているとき、 $y$ が書類審査を通る3人に入るならば $x$ も入るように書類審査の通過者を選ぶのは自然だろう。これを、効率性と呼ぶことにする。これらの3つの性質、審査担当者間での平等、応募者間での平等、そして効率性を満たす選び方はどのようなものがあるだろうか。

別の例として、選挙を考える。その選挙においては、1人の勝者を決める。各有権者は候補者に関する好みを持っており、その好みに基づいてのみ勝者を1人選ぶ。また、各候補者はその「名前」が有利あるいは不利に働くことはないとする。例えば「佐藤」という名前の候補者がいた場合に、有権者のうち1人でも「佐藤」が最も好ましいと表明した場合には「佐藤」を勝者とする、というのは「佐藤」という名前が有利に働く極端な例である。さらに、どのような2人の候補者 $x$ と $y$ についても、すべての有権者が $x$ を $y$ よりも好むならば $y$ は勝者にならない、とする。これも、効率性と呼ぶ。<sup>1</sup> この場合において、有権者間の平等と候補者間の平等、そして効率性を同時に達成する選び方はどのようなものがあるだろうか。

次節である程度厳密な議論によって示すことは、上の2つの例に限らず、あらかじめ選択する数（勝者の数）が決められている状況では「選ぶ側の平等」と「選ばれる側の平等」、そして効率性を同時に達成しながら「選ぶ側」の選好のみに基づいて結果をきめるような選択規則を設計することはほとんどの場合において不可能、ということである。

おかしいではないか。例えば、様々な選挙において1人を勝者として選んでいるのではないか、と思われるだろう。しかし、それらのすべての選挙制度においては、「同点」の勝者が複数生じた場合には年齢の高い方を勝者にしたり、くじ引きによって1人を選んだりするなどの規則を含んでいるのであ

---

<sup>1</sup> 上のパラグラフの効率性と違うことを言っているように思うかもしれないが、実際は整合的である。

る．前者の場合は「選ばれる側の平等」が達成されていないし，後者の場合は「選ぶ側の選好のみに基づいて結果を決める」ことに反している．

学術的な発見については，その発見者が明らかになっている場合が多いが，この不可能性定理については専門家の間ではあまりに「常識的」なせいか，誰が最初に発見したのか不明であり，「よく知られるように」といった言葉が添えられるのみである．

## 2 記法と定義

$N = \{1, \dots, n\}$  を個人（選ぶ側，有権者）の集合とし， $X$  を選択対象（選ばれる側，候補者）の集合とする．以下では，一般になじみ深いであろう，有権者と候補者という言葉を使う．各有権者は，すべての候補者を好ましい順に並べることができるとする．ただし，同程度に好ましい候補者が存在することも許す．そのような「順序」を有権者の選好と呼ぶ．有権者  $i$  の選好を  $R_i$  で表し，候補者  $x$  が候補者  $y$  以上に好まれることを  $x R_i y$  と表す．候補者  $x$  と  $y$  が  $R_i$  において同程度に好ましい場合には， $x R_i y$  と  $y R_i x$  が同時に成り立つ．また， $x R_i y$  が成り立つが  $y R_i x$  は成り立たないとき， $x$  は  $y$  よりも（厳密に）好まれると解釈され， $x P_i y$  と書く．

有権者全員の選好の組  $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)$  を選好プロファイルと呼ぶ．各正の整数  $k$ （ただし  $k$  は候補者数以下とする）に対して  $k$ -社会的選択規則  $f$  とは，各選好プロファイル  $\mathbf{R}$  に対して  $f(\mathbf{R}) \subset X$  であり，かつ  $f(\mathbf{R})$  がちょうど  $k$  人の候補者からなる場合をいう．すなわち， $k$ -社会的選択規則は，どのような選好プロファイルに対しても常に  $k$  人の勝者を指定する関数である．候補者  $x$  が選好プロファイル  $\mathbf{R}$  において勝者であることは  $x \in f(\mathbf{R})$  として表される．

一般に，有限集合  $A$  上の置換  $t$  とは，各  $a, b \in A$  に対して  $t(a) \neq t(b)$  とな

る  $A$  から  $A$  への関数のことである.<sup>2</sup> さて、各選好プロファイル  $\mathbf{R}$  と  $N$  上の各置換  $\pi$  に対して選好プロファイル  $(R_{\pi(1)}, R_{\pi(2)}, \dots, R_{\pi(n)})$  を  $\mathbf{R}^\pi$  と書く。これは、単に  $\mathbf{R}$  における選好を有権者の間で  $\pi$  に従って交換したものである。詳しく説明すると以下ようになる。選好プロファイルの記法においては、 $n$  個の選好のなかで最初に書かれているものが有権者 1 の選好、2 番目に書かれているものが有権者 2 の選好、 $\dots$ 、 $n$  番目に書かれているのが有権者  $n$  の選好である。すると、 $\mathbf{R}^\pi$  における有権者 1 の選好  $R_{\pi(1)}$  は、 $\mathbf{R}$  において有権者  $\pi(1)$  が持っていた選好であり、 $\mathbf{R}^\pi$  における有権者 2 の選好  $R_{\pi(2)}$  は、 $\mathbf{R}$  において有権者  $\pi(2)$  が持っていた選好であり、 $\dots$ 、 $\mathbf{R}^\pi$  における有権者  $n$  の選好  $R_{\pi(n)}$  は、 $\mathbf{R}$  において有権者  $\pi(n)$  が持っていた選好である。

また、各  $R_i$  と  $X$  上の各置換  $\rho$  に対して、新たな選好  $\rho(R_i)$  を、各候補者  $x, y \in X$  に対して  $x R_i y \iff \rho(x) \rho(R_i) \rho(y)$  によって定義する。これは、候補者の名前を  $\rho$  によって交換した結果の選好を  $\rho(R_i)$  と書いているだけである。例えば、 $X = \{x, y, z\}$  のときに  $x P_i y P_i z$  という  $R_i$  に対して、 $\rho(x) = y, \rho(y) = z, \rho(z) = x$  という置換  $\rho$  を考えると、選好  $\rho(R_i)$  は  $y \rho(P_i) z \rho(P_i) x$  となる。<sup>3</sup> 選好プロファイル  $(\rho(R_1), \rho(R_2), \dots, \rho(R_n))$  を  $\rho(\mathbf{R})$  と書く。

以上の準備のもとに、次節以降で用いる公理を導入する。 $f$  を  $k$ -社会的選択規則とする。

- ・匿名性：各選好プロファイル  $\mathbf{R}$  と  $N$  上の各置換  $\pi$  に対して  $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R}^\pi)$ .
- ・中立性：各選好プロファイル  $\mathbf{R}$  と  $X$  上の各置換  $\rho$  に対して  $f(\rho(\mathbf{R})) = \rho(f(\mathbf{R}))$ .

<sup>2</sup> 任意の集合  $B$  上の置換  $t$  とは、 $B$  から  $B$  への全単射を指すが、 $B$  が有限集合の場合には全射と単射のうちどちらかを仮定すれば、もう一方が導かれる。

<sup>3</sup> 選好  $\rho(R_i)$  から導かれる厳密な選好を  $\rho(P_i)$  と書く。

- ・ **効率性**：各選好プロファイル  $\mathbf{R}$  と各  $x, y \in X$  に対して，各  $i$  に対して  $x R_i y$  であり，ある  $j$  に対して  $x P_j y$  ならば，  $y \in f(\mathbf{R}) \Rightarrow x \in f(\mathbf{R})$ .

匿名性は，有権者の間で選好を  $\pi$  に従って交換しても勝者が変わらないことを意味する．中立性の定義において，  $\rho(f(\mathbf{R}))$  は，  $\mathbf{R}$  において選ばれていた勝者の集合  $f(\mathbf{R})$  の  $\rho$  による像である．たとえば  $\rho(x)=y, \rho(y)=z$  で  $f(\mathbf{R}) = \{x, y\}$  ならば  $\rho(f(\mathbf{R})) = \{y, z\}$  である．すると中立性は，有権者の選好において候補者を  $\rho$  に従って入れ替えると，勝者もそれにしたがって入れ替わることを意味する．

### 3 有権者数＝候補者数の場合

有権者と候補者の数が等しい場合を考える．簡単化のために，それぞれ 3 人とし，候補者の名前を  $x, y, z$  とする．このとき，  $k=1$  または  $k=2$  の場合に，匿名性と中立性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しないことが以下のようにしてわかる．具体的に，  $k=2$  として議論を進める．仮に，匿名性と中立性を同時に満足するような 2-社会的選択規則が存在したとする．このとき，以下のような表によってあらわされる  $\mathbf{R}$  を考える．

		<hr/>			
		有権者	1	2	3
		<hr/>			
$\mathbf{R}$ :	最も好ましい	$x$	$y$	$z$	
			$y$	$z$	$x$
				$z$	$x$ $y$
		<hr/>			

この表は、有権者 1 は  $x$  が最も好ましい、 $y$  が 2 番目に好ましい、 $z$  が 3 番目に好ましいという選好を持っていることを表す。他の有権者についても同様に読む。このとき、例えば  $f(\mathbf{R}) = \{x, y\}$  であったとしよう。(ほかの候補者が勝者として選ばれた場合も議論の仕方は変わらない。)

$N$  上の置換  $\pi$  として、 $\pi(1) = 2$ ,  $\pi(2) = 3$ ,  $\pi(3) = 1$  とする。すると、 $\mathbf{R}^\pi$  は以下ようになる。

		有権者		
		1	2	3
$\mathbf{R}^\pi$ :	最も好ましい	$y$	$z$	$x$
		$z$	$x$	$y$
		$x$	$y$	$z$

匿名性より、 $f(\mathbf{R}^\pi) = \{x, y\}$  である。

次に、 $X$  上の置換  $\rho$  として  $\rho(x) = y$ ,  $\rho(y) = z$ ,  $\rho(z) = x$  を考える。このとき、 $\rho(\mathbf{R})$  は以下ようになる。

		有権者		
		1	2	3
$\rho(\mathbf{R})$ :	最も好ましい	$y$	$z$	$x$
		$z$	$x$	$y$
		$x$	$y$	$z$

中立性より、 $f(\rho(\mathbf{R})) = \{y, z\}$  となる。

さて、上の  $\mathbf{R}^\pi$  と  $\rho(\mathbf{R})$  を見比べればわかるように  $\mathbf{R}^\pi = \rho(\mathbf{R})$  であるから、当然  $f(\mathbf{R}^\pi) = f(\rho(\mathbf{R}))$  となるはずだが、実際には  $f(\mathbf{R}^\pi) = \{x, y\}$  かつ  $f(\rho(\mathbf{R})) = \{y, z\}$

となる．これは矛盾であるので，匿名性と中立性を満足する 2-社会的選択規則は存在しない．

以上の議論の容易な一般化によって，有権者の数と候補者の数が等しい時に，その数よりも小さい  $k$  に対して匿名性と中立性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しないことを示すことができる．

## 4 有権者数 $\neq$ 候補者数の場合

前節は，有権者数と候補者数が等しいという，実際にはあまりなさそうな状況を考えて．そこでは，効率性を持ち出すまでもなく，匿名性と中立性を満足する社会的選択規則を設計することは不可能であった．本節では，より現実的な状況において，匿名性，中立性，効率性を満足する社会的選択規則を設計することが不可能であることを示す．

### 4.1 有権者数 $>$ 候補者数の場合

簡単化のために，有権者が 5 人，候補者が 3 人とする．ここでも候補者の名前を  $x, y, z$  とする．このとき， $k=1$  または  $k=2$  の場合に，匿名性と中立性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しないことが以下のようにしてわかる．（したがって，やはりこの場合も効率性を考えるまでもなく不可能性を得る．）

下の表で与えられる選好プロファイル  $R$  を考える．

		有権者				
		1	2	3	4	5
$R$ :	最も好ましい	$x$	$y$	$z$	$xyz$	$xyz$
			$y$	$z$	$x$	
			$z$	$x$	$y$	

この  $\mathbf{R}$  において、有権者 4 と 5 は  $x, y, z$  はすべて同程度に好ましいと考えている。すると、 $N$  上の置換として  $\pi(1)=2, \pi(2)=3, \pi(3)=1, \pi(4)=4, \pi(5)=5$  を考え、 $X$  上の置換として前節と同じものを考えれば、まったく同じ議論によって匿名性と中立性を満足する  $k$ -社会的選択規則が存在しないことがわかる。

一般的には、候補者数よりも小さい  $k$  を考えると、匿名性と中立性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しない。

## 4.2 有権者数 < 候補者数の場合

簡単化のために、有権者が 3 人、候補者が 5 人とし、候補者の名前を  $x, y, z, w, v$  とする。このとき、 $k=1$  または  $k=2$  の場合に、匿名性、中立性、効率性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しないことが以下のようにしてわかる。

以下のような表によってあらわされる  $\mathbf{R}$  を考える。

		有権者		
		1	2	3
$\mathbf{R}$ :	最も好ましい	$x$	$y$	$z$
		$y$	$z$	$x$
		$z$	$x$	$y$
		$w$	$w$	$w$
		$v$	$v$	$v$

話を具体的にするために  $k=2$  とする。効率性より  $f(\mathbf{R})$  に  $w$  と  $v$  は属さない。仮に  $w \in f(\mathbf{R})$  とすると、効率性より  $x, y, z$  のすべてが  $f(\mathbf{R})$  に属することになり、 $f(\mathbf{R})$  が 2 人の勝者を選ぶことに矛盾する。

したがって、 $f(\mathbf{R})$  は  $x, y, z$  のうちの 2 つということになる。このとき、 $N$



上の置換として  $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 1$  という以前と同じものを考え、 $X$  上の置換として  $\rho(x) = y, \rho(y) = z, \rho(z) = x, \rho(w) = w, \rho(v) = v$  を考えれば、以前と同じ議論によって矛盾を導くことができる。

ここでは、一般的に有権者数よりも小さい  $k$  を考えると、匿名性、中立性、効率性を満足する  $k$ -社会的選択規則は存在しない。

## 5 おわりに

社会的選択は我々の生活の様々な場面において重要な役割を果たしているが、何らかの意味で「良い」社会的選択の方法を設計することは非常に困難である。本稿で中心的な役割を果たしたのは匿名性と中立性と呼ばれる、「有権者間の平等」と「候補者間の平等」を求める基準であった。これらを同時に満足するような社会的選択規則を設計できない、という事実は奇妙に感じるかもしれないが、実はほぼ当たり前でもある。3節の選好プロファイル  $R$  を考えると、そこでの選好から何らかの候補者を勝者として選び取る根拠を見出すことは困難である。したがって、有権者の選好のみに基づいて  $x, y, z$  から 1 人もしくは 2 人の勝者を選び取る際には有権者のうちの誰かの選好を重視する、あるいは無視するか、候補者のうちの誰かを優遇する他はないのである。